BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI
& TRƯỜNG ĐẠI HỌC PAUL SABATIER, PHÁP

TRẦN ĐỨC ANH

TÊN ĐỀ TÀI LUẬN ÁN

Đường cong Brody giới hạn và bài toán nâng ánh xạ từ đa đĩa đối xứng hóa trong chiều thấp

Chuyên ngành: Hình học và Tôpô
Mã số: 62.46.01.05

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội – Năm 2017

Công trình được hoàn thành tại: Đại học sư phạm Hà Nội và Đại học Paul Sabatier, Toulouse III, Pháp.

Người hướng dẫn khoa học: GS. TSKH Đỗ Đức Thái và GS. TSKH Pascal J. Thomas

Phản biện 1: GS. TSKH. Gerd Dethloff (Trường Đại học UBO Brest, CH Pháp)

Phản biện 2: GS. TSKH Hà Huy Khoái (Trường Đại học Thăng Long)

Phản biện 3: PGS. TSKH Jasmin Raissy (Trường Đại học Paul Sabatier, Toulouse III, CH Pháp)

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Trường họp tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội vào hồi …..giờ … ngày … tháng… năm…

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện: Thư viện Quốc Gia, Hà Nội hoặc Thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Mở đầu

Luận án này gồm ba chương chính với nội dung cơ bản như sau:

Chương 1 trình bày mở rộng kết quả của ba tác giả Đỗ Đức Thái, Mai Anh Đức và Ninh Văn Thu về lớp các đa tạp không thuộc kiểu $E-$giới hạn, hay còn gọi là các đa tạp không chứa các đường cong $E-$Brody giới hạn. Kết quả chương 1 được công bố ở [3].

Chương 2 trình bày các kết quả về bài toán nâng ánh xạ từ đa đĩa đối xứng hóa $\mathbb{G}_n$ lên quả cầu phổ Ω_n với $n \leq 5$, trong đó đưa ra cụ thể hàm nâng và sau đó chứng minh công thức hàm nâng đó không có hiệu lực đối với chiều $n \geq 6$. Kết quả của chương 2 được công bố ở [1].

Chương 3 trình bày các kết quả về bài toán nâng ánh xạ từ đa đĩa đối xứng hóa $\mathbb{G}_4$ lên quả cầu phổ Ω_4 với điều kiện đạo hàm bậc 1 cho trước. Công việc này là sự nối tiếp các kết quả của N. Nikolov, P. Pflug và P. J. Thomas và cụ thể là làm rõ hơn bản chất các điều kiện cần và đủ để có thể nâng được địa phương. Các kết quả của chương 3 tạm thời chưa công bố ở tạp chí nào và hoàn toàn mới.

Chương 1

Về các đường cong E-Brody giới hạn

1.1 Dẫn nhập

Trong chương này, chúng tôi trình bày một chứng minh mới cho kết quả của các tác giả Đỗ Đức Thái, Mai Anh Đức và Ninh Văn Thu về các đường cong Brody giới hạn và họ không chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh hình. Các họ không chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh hình và đường Brody (tức là một đường cong chỉnh hình có đạo hàm bị chặn) có mối quan hệ mật thiết. Liên quan tới các chủ đề này, các tác giả của bài báo đã chứng minh được các kết quả sau.

Định lý 1.1. $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ *không thuộc loại E-giới hạn với mọi hàm độ dài* E *trên* $\mathbb{C}^n$.

Định lý 1.2. $(\mathbb{C}^*)^2$ *không thuộc loại* ds^2_{FS}*-giới hạn, trong đó* ds^2_{FS} *là metric Fubini-Study trên* $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Chứng minh của các tác giả này sử dụng một kết quả của J. Winkelmann và các kỹ thuật trích dãy khá phức tạp. Vì thế trong bài báo này, chúng tôi cố gắng đưa ra một chứng minh khác ngắn hơn và tổng quát hơn một chút.

Đầu tiên, chúng tôi nhắc lại một vài định nghĩa và giải thích nội dung các định lý của ba tác giả.

Định nghĩa 1.3. Cho X là một đa tạp phức được trang bị một metric Hermit E. Đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{C} \to X$ được gọi là một **đường cong E-Brody** nếu đạo hàm của nó bị chặn, tức là $|f'(z)|_E \leq c$ với mọi $z \in \mathbb{C}$ trong đó c là một hằng số dương.

Hàm độ dài là khái niệm tổng quát hơn khái niệm metric, nhưng nó sẽ không liên quan gì tới chúng ta trong bài báo này, vì thế độc giả thể tham khảo bài báo của ba tác giả để xem định nghĩa. Lưu ý rằng nếu chúng tôi viết $E_p(\vec{v})$, thì điều đó có nghĩa là độ dài của vector tiếp xúc $\vec{v}$ tại điểm p theo metric E. Nếu điểm p đã rõ ràng, thì ta sẽ viết $|\vec{v}|_E$.

Định nghĩa 1.4. Cho X là một đa tạp phức được trang bị một metric Hermite E. Đa tạp phức X được gọi là thuộc **loại E-giới hạn** nếu X thỏa mãn các điều sau:

Với mỗi họ không chuẩn tắc $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\Delta, X)$, trong đó Δ là một miền trong $\mathbb{C}$ và $\mathrm{Hol}(\Delta, X)$ là tập tất cả các ánh xạ chỉnh hình từ Δ vào X, sao cho $\mathcal{F}$ không chứa các dạy phân kỳ compact, khi đó tồn tại các dãy $\{p_j\} \subset \Delta$ với $p_j \to p_0 \in \Delta$ khi $j \to \infty$, $\{f_j\} \subset \mathcal{F}, \{\rho_j\} \subset \mathbb{R}$ với $\rho_j > 0$ và $\rho_j \to 0^+$ khi $j \to \infty$ sao cho

$$g_j(\xi) := f_j(p_j + \rho_j \xi), \xi \in \mathbb{C},$$

hội tụ đều trên các tập compact của $\mathbb{C}$ tới một đường cong E-Brody khác hằng $g : \mathbb{C} \to X$.

Để tiện cho độc giả, chúng tôi nhắc lại định nghĩa họ chuẩn tắc và tính phân kỳ compact.

Định nghĩa 1.5. Họ $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\Delta, X)$ được gọi là **chuẩn tắc** nếu, với mỗi dãy $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ trong $\mathcal{F}$, đều tồn tại một dãy con hội tụ đều trên các tập con compact của Δ. Họ ánh xạ mà không có tính chất này thì được gọi là họ **không chuẩn tắc**.

Định nghĩa 1.6. Dãy $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ trong $\mathrm{Hol}(\Delta, X)$ được gọi là **phân kỳ compact** nếu, với mọi tập con compact $K \subset \Delta$ và $L \subset X$, đều tồn tại j_0 sao cho, với mọi $j \geq j_0$, ta có $f_j(K) \cap L = \emptyset$.

1.2 Sự không tồn tại các đường cong Brody giới hạn

Kết quả chính của chương này là kết quả tổng quát hơn Định lý 1.2 của ba tác giả có nội dung như sau:

Định lý 1.7 (Kết quả chính)**.** *Cho X là đa tạp phức có chứa một đường cong nguyên, tức là một đường cong chỉnh hình khác hằng $f : \mathbb{C} \to X$. Khi đó, cả hai đa tạp phức $\mathbb{C} \times X$ và $\mathbb{C}^* \times X$ đều không thuộc loại $E-$giới hạn với mọi metric Hermit E tương ứng trên $\mathbb{C} \times X$ và $\mathbb{C}^* \times X$.*

Để chứng minh định lý, ta sẽ sử dụng hai bổ đề. Bổ đề thứ nhất được phát biểu mà không chứng minh.

Bổ đề 1.8. *Cho $c_n > 0$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó các điều sau là tương đương.*
(a) $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + c_n) < \infty$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$.
Thêm nữa, (a) và (b) đều tương đương với điều sau.
(c) $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - c_n) > 0$ nếu ta giả sử thêm rằng $0 < c_n < 1$ với mọi n.

Bổ đề thứ hai là bổ đề chính, là chìa khóa cho chứng minh của kết quả chính.

Bổ đề 1.9. *Cho $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ là một dãy các số phức khác không đôi một phân biệt thỏa mãn $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_j|} < \infty$. Khi đó, với mọi số phức p_j và k_j với $1 \leq j \in \mathbb{N}$, tồn tại một hàm chỉnh hình $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ thỏa mãn điều kiện nội suy sau: $g(\alpha_j) = p_j$ và $g'(\alpha_j) = k_j$ với mọi $1 \leq j \in \mathbb{N}$.*

Để chứng minh bổ đề này, ta sử dụng kỹ thuật cơ bản của lý thuyết bó.

Chương 2

Bài toán nâng ánh xạ từ đa đĩa đối xứng hóa không có điều kiện đạo hàm

2.1 Tóm tắt nội dung

Quả cầu phổ đơn vị Ω_n là tập tất cả các ma trận vuông M cấp n có bán kính phổ nhỏ hơn 1. Để cho gọn, ta sẽ nói quả cầu phổ, thay cho quả cầu phổ đơn vị. Ký hiệu $\pi(M) \in \mathbb{C}^n$ là các hệ số của đa thức đặc trưng của ma trận M, tức là các đa thức đối xứng sơ cấp của các giá trị riêng của nó. Khi đó đa đĩa đối xứng hóa chiều n được định nghĩa là $\mathbb{G}_n := \pi(\Omega_n)$.

Thông thường khi khảo sát các bài toán Nevanlinna-Pick cho các ánh xạ từ đĩa vào quả cầu phổ, việc chiếu ánh xạ lên đa đĩa đối xứng hóa sẽ có lợi ích nhất định (ví dụ để nhận được các kết quả về tính liên tục của hàm Lempert): nếu $\Phi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \Omega_n)$, khi đó $\pi \circ \Phi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{G}_n)$. Cho ánh xạ $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{G}_n)$, chúng ta tìm điều kiện cần và đủ để ánh xạ này có thể nâng được qua các ma trận cho trước, tức là tìm Φ như trên sao cho $\pi \circ \Phi = \varphi$ và $\Phi(\alpha_j) = A_j$, $1 \leq j \leq N$. Một điều kiện cần tự nhiên là $\varphi(\alpha_j) = \pi(A_j)$, $1 \leq j \leq N$. Khi các ma trận A_j là vi phạm (tiếng Anh: derogatory; nghĩa là không thừa nhận một vector cyclic) các điều kiện cần mới sẽ xuất hiện, bao gồm các đạo hàm của φ tại các điểm α_j. Chúng tôi chứng minh rằng các điều kiện đó là cần và đủ để nâng địa phương. Chúng tôi đưa ra công thức để thực hiện nâng toàn cục đối với các chiều nhỏ ($n \leq 5$), và một phản ví dụ cho thấy công thức thất bại ở chiều từ 6 trở lên.

2.2 Dẫn nhập

Một vài bài toán trong Lý thuyết điều khiển mạnh dẫn tới việc nghiên cứu các giá trị kỳ dị có cấu trúc của một ma trận (được ký hiệu bởi μ). Một trường hợp đặc biệt của chuyện này chính là bán kính phổ của ma trận. Một ví dụ rất đặc biệt của bài toán "μ-tổng hợp" được quy về bài toán Nevanlinna-Pick, tức là cho trước các điểm $\alpha_j \in \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $A_j \in \Omega \subset \mathbb{C}^m$, $1 \leq j \leq N$, xác định xem tồn tại hay không hàm chỉnh hình Φ từ $\mathbb{D}$ vào Ω sao cho $\Phi(\alpha_j) = A_j$, $1 \leq j \leq N$. Các độc giả quan tâm có thể tham khảo bài tổng quan rất thú vị của Nicholas Young.

Chúng tôi nghiên cứu trường hợp đặc biệt này. Bây giờ chúng tôi sẽ đưa ra một vài ký hiệu.

Cho $\mathcal{M}_n$ là tập hợp tất cả các ma trận vuông phức cấp n. Với $A \in \mathcal{M}_n$ ký hiệu $\mathrm{Sp}(A)$ và $r(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$ lần lượt là phổ và bán kính phổ của A.

Định nghĩa 2.1. *Quả cầu phổ* Ω_n được cho bởi

$$\Omega_n := \{A \in \mathcal{M}_n : r(A) < 1\}.$$

Đa đĩa đối xứng hóa $\mathbb{G}_n$ được định nghĩa bởi

$$\mathbb{G}_n := \{\pi(A) : A \in \Omega_n\},$$

trong đó ánh xạ $\pi : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $\pi = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, được cho bởi các hệ số của đa thức đặc trưng của ma trận (sai khác dấu):

$$P_A(t) := \det(tI_n - A) =: \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma_j(A) t^{n-j}.$$

Hay nói cách khác, tọa độ thứ k của π, tức $\sigma_k(A)$, là đa thức đối xứng sơ cấp thứ k của các giá trị riêng của A.

Bài toán 2.2. *(Bài toán nâng).*

Cho ánh xạ $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{G}_n)$ và $A_1, \ldots, A_N \in \Omega_n$, tìm các điều kiện (cần, hoặc đủ) sao cho tồn tại hàm chỉnh hình $\Phi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \Omega_n)$ thỏa mãn $\varphi = \pi \circ \Phi$ và $\Phi(\alpha_j) = A_j$ với $j = 1, \ldots, N$.

Khi điều này xảy ra, ta nói rằng ánh xạ φ *nâng* qua các ma trận $A_1, \ldots, A_N$ tại các điểm $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$. Một điều kiện cần hiển nhiên để cho φ nâng qua các ma trận $A_1, \ldots, A_N$ tại $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ là $\varphi(\alpha_j) = \pi(A_j)$ với $j = 1, \ldots, N$.

Nhận xét 2.3. Bất cứ khi nào có một nghiệm cho bài toán nâng với dữ liệu α_j, A_j, thì khi đó sẽ có một nghiệm cho bài toán tương ứng với $\alpha_j, \tilde{A}_j$, trong đó $A_j \sim \tilde{A}_j$ với mỗi j, tức là A_j đồng dạng với $\tilde{A}_j$, tức là với mỗi j tồn tại $P_j \in \mathcal{M}_n^{-1}$ sao cho $\tilde{A}_j = P_j^{-1} A_j P_j$.

2.3 Những thu gọn đầu tiên của bài toán

Ta cần thiết lập một số ký hiệu.

Định nghĩa 2.4. Cho trước một vector $v := (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$, ta ký hiệu $P_{[v]}(t) := t^n + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j v_j t^{n-j}$.

Cách chọn này đảm bảo $P_{[\pi(A)]} = P_A$.

Định nghĩa 2.5. Cho $a := (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, *ma trận đồng hành* của a là

$$C_{[a]} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Ta thấy rằng đa thức đặc trưng của nó khi đó là $\det(tI_n - C_{[a]}) = t^n - \sum_{j=1}^{n} a_j t^{n-j}$, để cho $\sigma_j(C_{[a]}) = (-1)^{j+1} a_j$, với $1 \leq j \leq n$.

Cho ma trận M, *ma trận đồng hành* của M, ký hiệu là C_M, là ma trận duy nhất ở dạng đồng hành có cùng đa thức đặc trưng với M.

Ma trận $A \in \mathcal{M}_n$ là cyclic (hay không vi phạm) khi và chỉ khi nó đồng dạng với ma trận đồng hành của nó.

Tính toán trên của đa thức đặc trưng của ma trận đồng hành cho thấy $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{G}_n)$, nếu ta viết $\tilde{\varphi} := ((-1)^{j+1}\varphi_j, 1 \leq j \leq n)$, thì ánh xạ được cho bởi $\Phi(\zeta) := C_{[\tilde{\varphi}(\zeta)]}$ là một nâng của φ.

Do đó, kết hợp với Nhận xét 2.3, điều này có nghĩa là việc nâng qua một tập hợp các ma trận cyclic có thể đạt được ngay khi các điều kiện cần hiển nhiên $\varphi(\alpha_j) = \pi(A_j)$, với $1 \leq j \leq N$, được thỏa mãn.

Trường hợp A_1 chỉ có đúng một giá trị riêng , và $A_2, \ldots, A_N$ cyclic, đã được nghiên cứu trong bài báo của P. J. Thomas và Nguyễn Văn Trào.

2.4 Các điều kiện cần

Cho $A_1 \in \mathcal{M}_n$. Sai khác đồng dạng, ta có thể giả sử nó có dạng Jordan. Ta viết nó dưới dạng khối liên kết với mỗi giá trị riêng *phân biệt* của A_1, ký hiệu là $\lambda_k, 1 \leq k \leq s$ trong đó $s \leq n$. Cụ thể là

$$A_1 = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_s \end{pmatrix}, \quad B_k \in \mathcal{M}_{m_k}, \quad \sum_{k=1}^{s} m_k = n, \tag{2.1}$$

trong đó Sp $B_k = \{\lambda_k\}$, và $\lambda_j \neq \lambda_k$ với $k \neq j$.

Tạm thời, ta cố định k và viết (B, λ, m) thay cho (B_k, λ_k, m_k). Ta cần thiết lập một vài ký hiệu như trong bài báo của P. J. Thomas và Nguyễn Văn Trào. Cho $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$. Khi đó $b_{jj} = \lambda$, $b_{j-1,j} \in \{0, 1\}$, $2 \leq j \leq m$, và $b_{ij} = 0$ nếu hoặc $i > j$ hoặc $i + 1 < j$.

Ký hiệu r là hạng của $B - \lambda I_m$, tức là có đúng $m - r$ cột trong $B - \lambda I_m$ đồng nhất 0, cái thứ nhất, và những cái được đánh số bởi các số nguyên $j \geq 2$ sao cho $b_{j-1,j} = 0$. Đánh số tập hợp (có thể rỗng) các chỉ số cột mà hệ số $b_{j-1,j}$ triệt tiêu như sau

$$\{j : b_{j-1,j} = 0\} =: \{b_2, \ldots, b_{m-r}\}, 2 \leq b_2 < \cdots < b_{m-r} \leq m.$$

Một cách tương đương, $b_{l+1} - b_l$ là cỡ của khối Jordan $B^{(l)} := (b_{ij})_{b_l \leq i,j \leq b_{l+1}-1}$. Số nguyên $b_{l+1} - b_l$ là bậc lũy linh của khối $B^{(l)}$.

Ta có thể chọn dạng Jordan sao cho $b_{l+1} - b_l$ là dãy tăng theo $1 \leq l \leq m - r$, với quy ước $b_{m-r+1} := m + 1$. Tức là các số 0 có thể có xuất hiện với các chỉ số j nhỏ nhất có thể một cách toàn cục.

Định nghĩa 2.6. Với $1 \leq i \leq m$,

$$d_i(B) = d_i := 1 + \#\{k : m - i + 2 \leq b_k \leq m\}.$$

Một cách tương đương, $d_i - 1$ là số các cột đồng nhất 0, trong số $i - 1$ cột cuối của A_1 hay

$$d_i = 1 + (m - r) - \max\{j : b_j \leq m - i + 1\},$$

với quy ước rằng số max bằng 0 nếu tập hợp bên phải là rỗng.

Ta cũng có thể diễn giải $d_j = d_j(B)$ như là số nguyên d nhỏ nhất sao cho có một tập S của d vector trong $\mathbb{C}^n$ với tính chất rằng các lặp lại của S bởi B sinh ra một không gian con của $\mathbb{C}^n$ với chiều không bé hơn j (ta sẽ không cần đặc trưng này, và vì thế chúng tôi không trình bày chứng minh).

Chú ý rằng B là cyclic khi và chỉ khi $d_i(B) = 1$, với mọi i ($b_{j-1,j} = 1$ với mọi j); trong khi đó nó là vô hướng khi và chỉ khi $d_i(B) = i$, với mọi i ($b_{j-1,j} = 0$ với mọi j).

Mệnh đề sau đưa ra một tập hợp các điều kiện nâng cần và đủ về mặt địa phương. Nói riêng, điều này nói rằng tất cả các điều kiện cần có thể có mà có thể nhận được từ biểu hiện của Φ trong một lân cận $\alpha \in \mathbb{D}$ đều được vét cạn bởi (3.8).

Mệnh đề 2.7. *Cho $\varphi \in Hol(\omega, \mathbb{G}_n)$, với ω là một lân cận của $\alpha \in \mathbb{D}$. Cho A_1 như trong (2.1). Các khẳng định sau là tương đương:*

(a) Tồn tại $\omega' \subset \mathbb{D}$ một lân cận của α và $\Phi \in \mathrm{Hol}(\omega', \Omega_n)$ sao cho

$$\pi \circ \Phi = \varphi, \Phi(0) = A_1;$$

(b) Ánh xạ φ thỏa mãn

$$\frac{d^k P_{[\varphi(\zeta)]}}{dt^k}(\lambda_j) = O((\zeta - \alpha)^{d_{m_j - k}(B_j)}), \quad 0 \le k \le m_j - 1, 1 \le j \le s, \quad (2.2)$$

trong đó d_i như trong Định nghĩa 2.6.

(c) Tồn tại $\omega' \subset \mathbb{D}$ một lân cận của α và $\Phi \in Hol(\omega', \Omega_n)$ sao cho

$$\pi \circ \Phi = \varphi, \Phi(0) = A_1 \text{ và } \Phi(\zeta) \text{ cyclic với } \zeta \in \omega' \setminus \{\alpha\}.$$

2.5 Kết quả chính

Đầu tiên ta cần một bổ đề đại số tuyến tính cho ta dạng chính tắc của các ma trận, khác một chút so với dạng Jordan để thích hợp với mục đích của chúng ta. Chúng tôi gọi nó là *dạng Jordan sửa đổi.*

Chúng tôi cần thiết lập các ký hiệu sửa đổi một chút. Cho $A_1 \in \mathcal{M}_n$ có $Sp(A_1) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$: ở đây các giá trị riêng tính lặp lại theo bội. Cho $m_1, \ldots, m_s$ là các bội tương ứng, đặt $n_j = m_1 + \cdots + m_j$. Khi đó $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_s = n$ và $\lambda_k = \lambda_{k'}$ khi và chỉ khi tồn tại $i \in \{1, \ldots, s\}$ sao cho $n_{i-1} < k, k' \le n_i$.

Ta giả sử rằng $A_1 := (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ ở dạng Jordan với các ký hiệu của (2.1), trừ việc đánh chỉ số các giá trị riêng: bây giờ Sp $B_k = \{\lambda_{n_k}\}$.

Bổ đề 2.8. *Ma trận A_1 được cho như trên đồng dạng với $A' = (a'_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ trong đó $a'_{n_i, 1+n_i} = 1 \ne a_{n_i, 1+n_i} = 0$, $1 \le i \le s-1$, và $a'_{ij} = a_{ij}$ với mọi giá trị khác của các chỉ số.*

Mệnh đề 2.9. *Cho Φ là ánh xạ từ $\mathbb{D}$ (trừ một số kỳ dị) vào $\mathcal{M}_n$ được định nghĩa bởi*

$$\Phi(\zeta) := \begin{pmatrix} \varphi_{1,1}(\zeta) & f_2(\zeta) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_{2,2}(\zeta) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & f_{n-1}(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_{n-1,n-1}(\zeta) & f_n(\zeta) \\ \varphi_{n,1} & \varphi_{n,2} & \cdots & \varphi_{n,n-1} & \varphi_{n,n} \end{pmatrix},$$

trong đó f_k, $2 \le k \le n$, và $\varphi_{k,k}$, $1 \le k \le n-1$, là các hàm chỉnh hình được chọn, f_k không đồng nhất 0, và trong đó

$$\varphi_{n,\ell} := -\frac{\Delta^{\ell-1} P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \dots \varphi_{\ell,\ell})}{\prod_{k=\ell+1}^{n} f_k(\zeta)}, \quad 1 \le \ell \le n-1, \tag{2.3}$$

và cuối cùng

$$\varphi_{n,n} := -\Delta^{n-1} P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \dots, \varphi_{n-1,n-1}, 0) = \varphi_1 - (\varphi_{1,1} + \dots + \varphi_{n-1,n-1}).$$

Khi đó $\pi \circ \Phi(\zeta) = \varphi(\zeta)$, với các giá trị của ζ mà tại đó các thương có nghĩa.

Cho A' như trong kết luận của Bổ đề 2.8, và $\alpha \in \mathbb{D}$. Nếu $f_k(\alpha) = a'_{k-1,k}$, $2 \le k \le n$, $\varphi_{kk}(\alpha) = \lambda_k$, $1 \le k \le n$, và $\varphi_{n,k}(\alpha) = 0$, $1 \le k \le n-1$, thì $\Phi(\alpha) = A'$.

Nếu $f_k(\zeta) \neq 0$ với mọi $k \in \{2, \dots, n\}$ và $\zeta \in \mathbb{D} \setminus \{\alpha\}$, thì $\Phi(\zeta)$ cyclic với $\zeta \in \mathbb{D} \setminus \{\alpha\}$.

Kết quả quan trọng nhất của chương là:

Định lý 2.10. *Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $n \le 5$, $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{M}_n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{D}$ và $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{G}_n)$.*

Khi đó tồn tại $\Phi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \Omega_n)$ thỏa mãn $\varphi = \pi \circ \Phi$ và $\Phi(\alpha_j) = A_j$ với $j = 1, \dots, N$ khi và chỉ khi φ thỏa mãn các điều kiện (3.8) trang 18 cho mỗi j, với A_j thay cho A_1 và α_j thay cho α, trong đó $1 \le j \le N$.

Thêm nữa ta có thể chọn giá trị $\Phi(\zeta)$ là ma trận cyclic khi $\zeta \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Để chứng minh kết quả này, ta sử dụng công thức nâng ánh xạ đã nêu và kết hợp các kỹ thuật tính toán và chứng minh cho từng trường hợp dạng Jordan của mốc nội suy.

Chương 3

Bài toán nâng ánh xạ từ đa đĩa đối xứng hóa có điều kiệu đạo hàm bậc nhất

3.1 Phát biểu bài toán

Nhắc lại rằng $\pi\colon \Omega_4 \to \mathbb{G}_4$ là phép chiếu thông thường (hay ánh xạ đối xứng hóa) (xem Định nghĩa 2.1). Cho $B_0 \in \Omega_4$ và B_1 là một ma trận vuông phức cấp 4. Cho $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{G}_4$ là một đĩa chỉnh hình sao cho $\varphi(0) = \pi(B_0)$ và $\varphi'(0) = D\pi_{B_0}B_1$, trong đó $D\pi_{B_0}$ là đạo hàm của π tại B_0. Bộ ba như thế được gọi là dữ liệu, được ký hiệu bởi $\{\varphi, B_0, B_1\}$.

Ta nói dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ là **nâng được địa phương** nếu tồn tại một ánh xạ chỉnh hình $\Phi\colon \omega \to \Omega_4$ trong đó ω là một lân cận của $0 \in \mathbb{C}$ sao cho

$$\begin{cases} \varphi = \pi \circ \Phi \text{ on } \omega \\ \Phi(0) = B_0 \\ \Phi'(0) = B_1 \end{cases}.$$

Trong trường hợp này, ta gọi Φ là ánh xạ nâng (địa phương) của φ.

Bài toán 3.1. *Cho $\{\varphi, B_0, B_1\}$ là một dữ liệu. Tìm các điều kiện cần và đủ đối với φ sao cho dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ là nâng được địa phương.*

3.2 Những thu gọn đầu tiên của bài toán

Ta nói rằng hai dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ và $\{\varphi, B_0', B_1'\}$ là *tương đương* nếu tồn tại các ánh xạ chỉnh hình $\Phi\colon \omega \to \Omega_4$ và $P\colon \omega \to \mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$ sao cho

$\begin{cases} \Phi(0) & = B_0 \\ \Phi'(0) & = B_1 \end{cases}$ và $\begin{cases} (P^{-1}\cdot\Phi\cdot P)(0) & = B_0' \\ (P^{-1}\cdot\Phi\cdot P)'(0) & = B_1' \end{cases}$. Chú ý rằng φ không tham gia vào định nghĩa của tính tương đương. Ta dễ dàng thấy rằng nếu hai dữ liệu tương đương thì tính nâng được của dữ liệu này kéo theo tính nâng được của dữ liệu còn lại.

Ta quan sát mối quan hệ giữa (B_0, B_1) và (B_0', B_1') một cách chi tiết hơn: Đầu tiên, Ta có $B_0' = P(0)^{-1}B_0P(0)$, do đó hai ma trận B_0 và B_0' là đồng dạng. Điều này kéo theo rằng hai dữ liệu (φ, B_0, B_1) và $(\varphi, C^{-1}B_0C, C^{-1}B_1C)$ là tương đương với mọi $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Do đó ta có thể giả sử B_0 ở dạng Jordan, và kể từ bây giờ ta luôn giả sử điều đó.

Bây giờ, giả sử hai dữ liệu (φ, B_0, B_1) và (φ, B_0, B_1') là tương đương. Khi đó $P(0)$ là một ma trận giao hoán với B_0. Thêm nữa,

$$\begin{aligned} B_1' &= P(0)^{-1}B_1P(0) + P(0)^{-1}B_0P'(0) - P(0)^{-1}P'(0)P(0)^{-1}B_0P(0) \\ &= P(0)^{-1}B_1P(0) + P(0)^{-1}B_0P'(0) - P(0)^{-1}P'(0)B_0 \\ &\qquad (\text{ do } P(0) \text{ giao hoán với } B_0) \\ &= P(0)^{-1}B_1P(0) + P(0)^{-1}\Big(B_0P'(0) - P'(0)B_0\Big) \\ &= P(0)^{-1}B_1P(0) + P(0)^{-1}[B_0, P'(0)] \end{aligned} \tag{3.1}$$

trong đó $[B_0, P'(0)] = B_0P'(0) - P'(0)B_0$ là giao hoán tử thông thường.

Do đó, ta có

Mệnh đề 3.2. *Hai dữ liệu (φ, B_0, B_1) và $(\varphi, B_0, C^{-1}B_1C + C^{-1}[B_0, M])$ là tương đương trong đó $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ giao hoán với B_0 và $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ là ma trận vuông bất kỳ.*

Giả sử $\mathrm{Sp}(B_0) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ trong đó các λ_i là phân biệt và

$$B_0 = \begin{pmatrix} B_{0,\lambda_1} & & & \\ & B_{0,\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{0,\lambda_k} \end{pmatrix}$$

là dạng khối của B_0 trong đó $\mathrm{Sp}(B_{0,\lambda_i}) = \{\lambda_i\}$. Nhắc lại ký hiệu $P_{[\varphi(\zeta)]}(t) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\varphi_j(\zeta)t^{n-j}$ trong đó $\varphi_0 \equiv 1$ theo quy ước từ Định nghĩa 2.4. Đa thức này có thể phân tích thành k nhân tử đôi một nguyên tố cùng nhau

$$P_{[\varphi]}(t) = P_{[\varphi_1]}(t)P_{[\varphi_2]}(t)\ldots P_{[\varphi_k]}(t)$$

trong đó $\varphi_j(0) = \pi(B_{0,\lambda_j})$ với mỗi j. Thêm nữa, nếu Φ là một ánh xạ nâng của (φ, B_0, B_1), thì $\mathrm{Ker}(P_{[\varphi_j(\zeta)]}(\Phi(\zeta)))$ là một không gian con bất biến của Φ

tại mỗi giá trị của ζ và

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(P_{[\varphi_j(\zeta)]}(\Phi(\zeta))).$$

Điều đó có nghĩa là tính nâng được địa phương của (φ, B_0, B_1) tương đương với tính nâng được địa phương một cách đồng thời của k dữ liệu mới $(\varphi_j, B_{0,\lambda_j}, B_{1,\lambda_j})$.

Vì thế ta chỉ cần xét trường hợp mà B_0 có đúng một giá trị riêng và trong trường hợp đó, bằng cách áp dụng biến đổi Mobius $M \mapsto (M-\lambda I)(I-\bar{\lambda}M)^{-1}$, ta có thể giả sử B_0 lũy linh.

3.3 Tích hộp

Để phục vụ tính toán đạo hàm của $\pi \circ \Phi$, ta cần tuyến tính hóa các đa thức $\sigma_i(M)$ với $M \in \mathbb{C}^{n,n}$. Công cụ tuyến tính hóa đó được gọi là tích hộp. Ta không trình bày công cụ này ở đây mà chỉ nói ngắn gọn là: $\sigma_i(M)$ sẽ là tích $i-$tuyến tính của i ma trận M. Ký hiệu là

$$\sigma_i(M) = \frac{1}{i!} M \cdot M \cdot \ldots \cdot M.$$

Trong luận án, ta sẽ bỏ dấu $\cdot$ đi và không lo sợ nhầm lẫn với phép nhân ma trận, vì hầu như ta không sử dụng phép nhân ma trận.

3.4 Những phân tích đầu tiên về bài toán

Giả sử dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ có nâng địa phương Φ. Như trên, giả sử B_0 lũy linh. Ta nhắc lại các số d_i liên kết với B_0 mà đã được trình bày trong Định nghĩa 2.6. Cụ thể, ký hiệu (b_{ij}) là các hệ số của B_0 (thỉnh thoảng ta viết $(b_{i,j})$ nếu có nhu cầu tách biệt hai chỉ số), khi đó đặt

$$\begin{aligned} F_0 &= \{j\colon\ b_{j-1,j} = 0\} \cup \{1\} \\ &= \{b_1 = 1 < b_2 < \ldots < b_s\}. \end{aligned}$$

Số s ở đây là số các khối Jordan sơ cấp của B_0.

Tiếp theo, ta sắp xếp các khối Jordan sơ cấp của B_0 sao cho $b_{j+1} - b_j$ tăng với quy ước $b_{s+1} = \mathrm{size}(B_0) + 1 = n + 1$. Khi đó

$$d_i = 1 + \sharp\left(F_0 \cap [n+2-i..n]\right).$$

Do dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ là nâng được địa phương, nên theo chương trước,

$$P^{(k)}_{[\varphi(\zeta)]}(0) = \mathcal{O}(\zeta^{d_{n-k}}) \text{ for } 0 \leq k \leq n-1.$$

Nhưng $P^{(k)}_{[\varphi(\zeta)]}(0) = k!\sigma_{n-k}(-\Phi(\zeta)) = (-1)^{n-k}k!\sigma_{n-k}(\Phi(\zeta)) = (-1)^{n-k}k!\varphi_{n-k}(\zeta)$. Do đó, đối với ma trận lũy linh B_0, các điều kiện có dạng đơn giản như sau

$$\varphi_k(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{d_k}).$$

Ký hiệu $\Phi^{(k)}(0) = B_k$ là đạo hàm thứ k của Φ tại $\zeta = 0$. Ta biết là B_0, B_1 được cho trước, do đó các ma trận khác B_k là cái cần tìm. Một cách tự nhiên, các quan hệ giữa các B_k này bị chi phối bởi các điều kiện của φ tại $\zeta = 0$, tức là các giá trị của đạo hàm của nó ở đó. Do đó chúng ta phải tính các đạo hàm này theo Φ, tức là tính

$$\left.\frac{d^k}{d\zeta^k}\right|_{\zeta=0} \sigma_m(\Phi(\zeta)).$$

Mà ta đã biết từ tích hộp là

$$\sigma_m(\Phi) = \frac{1}{m!}\mathrm{Tr}(\underbrace{\Phi\Box\ldots\Box\Phi}_{m \text{ lần}}) = \frac{1}{m!}\underbrace{\Phi\cdot\ldots\cdot\Phi}_{m \text{ lần}}.$$

Theo luật Leibniz tổng quát,

$$\left.\frac{d^k}{d\zeta^k}\right|_{\zeta=0} \sigma_m(\Phi(\zeta)) = \frac{1}{m!}\sum_{\substack{j_1+j_2+\ldots+j_m=k \\ j_i\geq 0}} \frac{k!}{j_1!j_2!\ldots j_m!}\Phi^{(j_1)}(0)\Phi^{(j_2)}(0)\ldots\Phi^{(j_m)}(0) \tag{3.2}$$

$$= \frac{1}{m!}\sum_{\substack{j_1+j_2+\ldots+j_m=k \\ j_i\geq 0}} \frac{k!}{j_1!j_2!\ldots j_m!}B_{j_1}B_{j_2}\ldots B_{j_m}. \tag{3.3}$$

Hay nói cách khác,

$$\varphi^{(k)}_m(0) = \frac{1}{m!}\sum_{\substack{j_1+j_2+\ldots+j_m=k \\ j_i\geq 0}} \frac{k!}{j_1!j_2!\ldots j_m!}B_{j_1}B_{j_2}\ldots B_{j_m}. \tag{3.4}$$

Đây là các phương trình theo B_k với $k \geq 2$. Một nghiệm $\{B_k\}_{k\geq 2}$ của các phương trình này không nhất thiết tạo thành một ánh xạ chỉnh hình địa phương Φ quanh $\zeta = 0$. Điều đó có nghĩa là ta cần phải xử lý vấn đề hội tụ của nghiệm. Chúng tôi sẽ bàn điều đó sau.

3.5 Các trường hợp của B_0

Phát biểu các kết quả và chứng minh của Bài toán 3.1 sẽ được trình bày theo các trường hợp của B_0, cụ thể là theo dạng Jordan của B_0. Do B_0 lũy linh và không cyclic[1], nên có ba trường hợp cần xét:

(I) $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(III) $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(II) $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.6 Ánh xạ tuyến tính liên kết L_{B_0,B_1}, các điều kiện và lược đồ chứng minh

Cho $\{\varphi, B_0, B_1\}$ là một dữ liệu của bài toán nâng. Như chúng tôi đã lý luận trước đó, ta có thể giả sử B_0 là lũy linh và có dạng Jordan. Ký hiệu d_i là các số liên kết với B_0. Ví dụ, nếu

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

thì $d_1 = d_2 = d_3 = 1$ và $d_4 = 2$.

Nếu φ nâng được địa phương, thì $\varphi(0) = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^n$. Ta sẽ quan tâm ở đây trường hợp tổng quát trong đó n là cỡ của ma trận B_0. Nhưng chúng tôi chỉ có thể đưa ra các chứng minh cho trường hợp $n = 4$ trong các mục tiếp theo.

Ta biết từ Chương 2, điều kiện này kéo theo rằng

$$P^{(k)}_{[\varphi(\zeta)]}(0) = \mathcal{O}(\zeta^{d_{n-k}})$$

với $0 \le k \le n-1$. Nhưng vế trái là $k!(-1)^{n-k}\varphi_{n-k}(\zeta)$, nên ta nhận được các điều kiện đơn giản

[1] Trường hợp B_0 cyclic đã được xử lý trong bài báo của Huang, Marcantognini và Young.

$$\varphi_j(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{d_j}) \text{ với } 1 \le j \le n. \tag{3.5}$$

Các điều kiện này cho một hệ quả như sau.

Hệ quả 3.3. *Giả sử $B_0 \in \mathbb{C}^{n,n}$ lũy linh và $d_1, \dots, d_n$ là các số liên kết của nó. Với $M_1, M_2, \dots, M_k \in \mathbb{C}^{n,n}$ và $d_i \ge k+1$, ta luôn có*

$$\underbrace{B_0 B_0 \dots B_0}_{i-k \text{ lần}} M_1 M_2 \dots M_k = 0.$$

Nhắc lại rằng ta luôn có B_k là đạo hàm thứ k, hay $\Phi^{(k)}(0)$, của ánh xạ nâng Φ. Nhờ Hệ quả 3.3, các phương trình tại (3.4) có dạng

$$\varphi_m^{(k+d_m-1)}(0) = \frac{(k+d_m-1)!}{k!} \frac{\overbrace{B_0 B_0 \dots B_0}^{m-d_m \text{ lần}} \overbrace{B_1 B_1 \dots B_1}^{d_m-1 \text{ lần}} B_k}{(m-d_m)!(d_m-1)!} + \dots \tag{3.6}$$

trong đó các dấu chấm biểu thị cho các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k$. Điều này gợi ý là ta nên sắp xếp các phương trình tại (3.4) thành các nhóm gồm n phương trình. Cụ thể là đặt

$$\mathfrak{X}_k = \left\{ \frac{\varphi_1^{(k+d_1-1)}(0)}{(k+1)(k+2)\dots(k+d_1-1)}, \frac{\varphi_2^{(k+d_2-1)}(0)}{(k+1)(k+2)\dots(k+d_2-1)}, \dots \right.$$
$$\left. , \frac{\varphi_n^{(k+d_n-1)}(0)}{(k+1)(k+2)\dots(k+d_n-1)} \right\}. \tag{3.7}$$

Khi đó vế trái của các phương trình của φ (3.4) bị áp đặt bởi các giá trị của đạo hàm thứ k của ánh xạ φ, với mọi $k \ge 2$, chính là $\mathfrak{X}_k$ với $k \ge 2$ (nhận xét là với $k = 0$, và 1, B_0 và B_1 đã được cho trước).

Chúng ta mô tả vế phải của các phương trình đó. Xét ánh xạ tuyến tính sau $L_{B_0,B_1} \colon \mathbb{C}^{n,n} \to \mathbb{C}^n$ trong đó tọa độ thứ m của $L_{B_0,B_1}(M)$ với $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ được định nghĩa bởi công thức

$$\frac{\overbrace{B_0 B_0 \dots B_0}^{m-d_m \text{ lần}} \overbrace{B_1 B_1 \dots B_1}^{d_m-1 \text{ lần}} M}{(m-d_m)!(d_m-1)!}.$$

Ta gọi ánh xạ L_{B_0,B_1} này là *ánh xạ tuyến tính liên kết* với bài toán nâng (hoặc với dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$).

Bây giờ ta quan sát $\mathfrak{X}_k$ với $k \geq 2$. Nhận xét

$$\mathfrak{X}_k = L_{B_0,B_1}(B_k) + \dots$$

trong đó các dấu chấm biểu thị cho các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k$.

Ta nhận xét là nếu $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = n$, tức là L_{B_0,B_1} có hạng cực đại, thì ta có thể tìm thấy một dãy $\{B_k\}_{k\geq 2}$ là nghiệm của các phương trình trong đó B_k cần phải được tìm trước B_{k+1}.

Tuy nhiên, điều này không đảm bảo sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\zeta^k$ trong khi điều này là cần thiết cho việc Φ chỉnh hình trong một lân cận của $\zeta = 0$. Ta sẽ bàn về điều này trong một lát nữa.

Ta nhận xét là nếu $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) < n$, thì điều này cho ta một quan hệ tuyến tính giữa các đại lượng của $\mathfrak{X}_k$. Cụ thể là B_k có thể bị triệt tiêu khỏi tổ hợp tuyến tính nào đó của các vế phải của (3.4) để sản xuất ra các phương trình không phụ thuộc vào B_k, tức là chỉ phụ thuộc vào B_0, B_1, ..., B_{k-1}. Nhận xét là ta xét $B_2, B_3, \dots$, như là một chuỗi các thông tin mà trong đó B_{k-1} là thông tin biết trước thông tin B_k. Khi $k = 2$, điều này cho ta các điều kiện cần cụ thể về φ, và đây chính là cách mà N. Nikolov, P. Pflug và P. J. Thomas đã nhận được các điều kiện cần.

Trong trường hợp mà $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) < n$, một vài đại lượng của $\mathfrak{X}_k$ không có sự tham gia của B_k, ví dụ, $\varphi_n^{(k+d_n-1)}(0)$. Vì thế việc xét các đạo hàm tiếp theo là tự nhiên, ví dụ, $\varphi_n^{(k+d_n)}(0)$ cho tới khi nó phụ thuộc vào B_k nhưng không phải phụ thuộc vào B_{k+1}. Bằng cách này, chúng tôi thực tế đã thay L_{B_0,B_1} bởi một ánh xạ mới L_{B_0,B_1,B_2} mà B_2 tham gia vào trong định nghĩa của L_{B_0,B_1,B_2} nhưng không có B_k nào khác với $k \geq 3$. Ánh xạ mới L_{B_0,B_1,B_2} này phải có hạng cực đại.

Tuy nhiên, ta vẫn còn vấn đề về sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\zeta^k$. Điều này hóa ra cũng không quá khó khăn: nếu ta có thể tìm được một nghiệm$\{B_k\}$ có dạng B_k là các ma trận chỉ gồm đúng một dòng khác 0, thì sự hội tụ được đảm bảo, do dãy B_k sẽ bị chi phối bởi một quan hệ hồi quy tuyến tính và ta có thể đánh giá được chuẩn của chúng.

Để làm điều này, chúng tôi phải tìm một ma trận B_2 thích hợp sao cho hạn chế của L_{B_0,B_1,B_2} lên không gian con của $\mathbb{C}^{n,n}$, gồm các ma trận có đúng dòng cuối khác 0, có hạng cực đại, tức là có hạng bằng n.

Chứng minh khi đó chủ yếu là kỹ thuật tính toán và rất dài dòng.

3.7 Các kết quả chính

Xem trong phần kết luận.

Kết luận

Các kết quả chính của luận án bao gồm (được đánh số giống như trong luận án).

Định lý 1.7 Cho X là đa tạp phức có chứa một đường cong nguyên, tức là một đường cong chỉnh hình khác hằng $f\colon \mathbb{C} \to X$. Khi đó, cả hai đa tạp phức $\mathbb{C} \times X$ và $\mathbb{C}^* \times X$ đều không thuộc loại $E-$giới hạn với mọi metric Hermit E tương ứng trên $\mathbb{C} \times X$ và $\mathbb{C}^* \times X$.

Mệnh đề 2.11 Cho $\varphi \in Hol(\omega, \mathbb{G}_n)$, với ω là một lân cận của $\alpha \in \mathbb{D}$. Cho A_1 như trong (2.1). Các khẳng định sau là tương đương:

(a) Tồn tại $\omega' \subset \mathbb{D}$ một lân cận của α và $\Phi \in \mathrm{Hol}(\omega', \Omega_n)$ sao cho

$$\pi \circ \Phi = \varphi, \Phi(0) = A_1;$$

(b) Ánh xạ φ thỏa mãn

$$\frac{d^k P_{[\varphi(\zeta)]}}{dt^k}(\lambda_j) = O((\zeta - \alpha)^{d_{m_j - k}(B_j)}), \quad 0 \le k \le m_j - 1, 1 \le j \le s, \quad (3.8)$$

trong đó d_i như trong Định nghĩa 2.6.

(c) Tồn tại $\omega' \subset \mathbb{D}$ một lân cận của α và $\Phi \in Hol(\omega', \Omega_n)$ sao cho

$$\pi \circ \Phi = \varphi, \Phi(0) = A_1 \text{ và } \Phi(\zeta) \text{ cyclic với } \zeta \in \omega' \setminus \{\alpha\}.$$

Định lý 2.20 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $n \le 5$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{M}_n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{D}$ và $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{G}_n)$.

Khi đó tồn tại $\Phi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \Omega_n)$ thỏa mãn $\varphi = \pi \circ \Phi$ và $\Phi(\alpha_j) = A_j$ với $j = 1, \ldots, N$ khi và chỉ khi φ thỏa mãn các điều kiện (3.8) cho mỗi j, với A_j thay cho A_1 và α_j thay cho α, trong đó $1 \le j \le N$.

Thêm nữa ta có thể chọn giá trị $\Phi(\zeta)$ là ma trận cyclic khi $\zeta \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

Định lý 3.7 Giả sử $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$. Dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương khi và chỉ khi các điều kiện sau được thỏa mãn

(i) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$,

(ii) $\varphi_1'(0) = \sigma_1(B_1)$, $\varphi_2'(0) = B_0B_1$, $\varphi_3'(0) = \dfrac{B_0B_0B_1}{2}$,

(iii) $\varphi_4'(0) = 0$, $\varphi_4''(0) = \dfrac{B_0B_0B_1B_1}{2} = 0$,

(iv) $\dfrac{\varphi_4'''(0)}{3} - b_{11}\varphi_3''(0) = \dfrac{B_0B_1B_1B_1}{3} - b_{11}B_0B_1B_1$.

Định lý 3.8 Giả sử $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 4$. Dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương khi và chỉ khi các điều kiện sau được thỏa mãn

(i) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$,

(ii) $\varphi_1'(0) = \sigma_1(B_1)$, $\varphi_2'(0) = B_0B_1$, $\varphi_3'(0) = \dfrac{B_0B_0B_1}{2}$,

(iii) $\varphi_4'(0) = 0$, $\varphi_4''(0) = \dfrac{B_0B_0B_1B_1}{2} = 0$.

Định lý 3.9 Giả sử $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 2$. Dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương khi và chỉ các điều sau được thỏa mãn

(i) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$,

(ii) $\varphi_1'(0) = \sigma_1(B_1)$, $\varphi_2'(0) = B_0B_1$,

(iii) $\varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0$,

(iv) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$,

(v) $\varphi_4''(0) = \frac{B_0B_0B_1B_1}{2} = 2\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix} = 0$,

(vi) $\varphi_4'''(0) = B_0B_1B_1B_1$,

(vii) $\frac{\varphi_3'''(0)}{3} - \alpha\varphi_2''(0) = 2\sigma_3(B_1) - 2\alpha\sigma_2(B_1)$.

Định lý 3.10 Giả sử $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$. Dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương khi và chỉ khi

(i) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$,

(ii) $\varphi_1'(0) = \sigma_1(B_1)$, $\varphi_2'(0) = B_0B_1$,

(iii) $\varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0$,

(iv) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$,

(v) $\varphi_4''(0) = \frac{B_0B_0B_1B_1}{2} = 2\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix}$,

(vi) $\varphi_4'''(0) + 3\kappa\varphi_2''(0) = B_0B_1B_1B_1 + 6\kappa\sigma_2(B_1)$.

Định lý 3.11 Giả sử $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 4$. Dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương khi và chỉ khi

(i) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$,

(ii) $\varphi_1'(0) = \sigma_1(B_1)$, $\varphi_2'(0) = B_0B_1$,

(iii) $\varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0$,

(iv) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$,

(v) $\varphi_4''(0) = \frac{B_0B_0B_1B_1}{2} = 2\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix}$.

Định lý 3.12 Trong trường hợp $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 2$ và $\{b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}\} \neq \{0\}$ dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương khi và chỉ khi

(i) $\varphi(0) = \pi(B_0) = (0, 0, 0, 0)$,

(ii) $\varphi'(0) = (\sigma_1(B_1), B_0B_1, 0, 0) = (\sigma_1(B_1), -b_{43}, 0, 0)$,

(iii) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$,

(iv) $\varphi_4''(0) = 0$,

(v) $\underbrace{\frac{\varphi_3'''(0)}{3} - 2\sigma_3(B_1)}_{=B_0B_1B_2} = (b_{11} + b_{22})\Big(\underbrace{\varphi_2''(0) - 2\sigma_2(B_1)}_{B_0B_2}\Big)$

(vi) $\underbrace{\frac{\varphi_4^{(4)}(0)}{12} - 2\sigma_4(B_1)}_{=\frac{B_0B_1B_1B_2}{2}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}\Big(\underbrace{\varphi_2''(0) - 2\sigma_2(B_1)}_{=B_0B_2}\Big)$.

Định lý 3.13 Trong trường hợp $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 2$ và $\{b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}\} = \{0\}$ dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương khi và chỉ khi

(i) $\varphi(0) = \pi(B_0) = (0, 0, 0, 0)$,

(ii) $\varphi'(0) = (\sigma_1(B_1), B_0B_1, 0, 0) = (\sigma_1(B_1), -b_{43}, 0, 0)$,

(iii) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$,

(iv) $\varphi_4''(0) = 0$,

(v) $\dfrac{\varphi_3'''(0)}{3} = \dfrac{\varphi_4^{(4)}(0)}{12} = 0$

(vi) $\varphi_4^{(5)}(0) = 0$.

Định lý 3.14 Nếu $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$, thì dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương khi và chỉ khi các điều kiện sau được thỏa mãn

(i) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$,

(ii) $\varphi_1'(0) = \sigma_1(B_1)$, $\varphi_2'(0) = B_0B_1 = -b_{43}$,

(iii) $\varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0$,

(iv) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$, $\varphi_4''(0) = 0$,

(v) $\varphi_4'''(0) = B_0B_1B_1B_1$,

(vi) $\dfrac{\varphi_4^{(4)}(0)}{12} - \kappa\dfrac{\varphi_3'''(0)}{3} - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \varphi_2''(0) = 2\sigma_4(B_1) - 2\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \sigma_2(B_1)$
$- 2\kappa\sigma_3(B_1) + 2\kappa(b_{11} + b_{22})\sigma_2(B_1)$.

Định lý 3.15 Dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương khi và chỉ khi

(i) $\varphi(0) = \pi(B_0)$,

(ii) $\varphi'(0) = \mathrm{D}\pi_{B_0}B_1$ trong đó $\mathrm{D}\pi_{B_0}$ là đạo hàm toàn phần của π tại B_0,

(iii) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$, $\varphi_4''(0) = 0$, $\varphi_4'''(0) = B_0B_1B_1B_1$.

Các bài báo đã được công bố và tiền ấn phẩm của tác giả

[1] Nikolov, Nikolai, Thomas, Pascal J., and Tran, Duc-Anh. "Lifting maps from the symmetrized polydisc in small dimensions". *Complex Anal. Oper. Theory* 10.5 (2016), pp. 921–941.

[2] Tran, Duc-Anh. "Lifting map problem from the symmetrized polydisc $\mathbb{G}_4$ with given first derivative". Preprint.

[3] Tran, Duc-Anh. "On the non-existence of limit E-Brody curves". *Acta Math. Vietnam.* 41.4 (2016), pp. 711–714.