BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI
& TRƯỜNG ĐẠI HỌC PAUL SABATIER, PHÁP

TRẦN ĐỨC ANH

TÊN ĐỀ TÀI LUẬN ÁN

Đường cong Brody giới hạn và bài toán nâng ánh xạ từ đa đĩa đối xứng hóa trong chiều thấp

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội – Năm 2017

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI
& TRƯỜNG ĐẠI HỌC PAUL SABATIER, PHÁP

TRẦN ĐỨC ANH

TÊN ĐỀ TÀI LUẬN ÁN

Đường cong Brody giới hạn và bài toán nâng ánh xạ từ đa đĩa đối xứng hóa trong chiều thấp

Chuyên ngành: Hình học và Tôpô
Mã số: 62.46.01.05

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
1. GS. TSKH Đỗ Đức Thái
2. GS. TSKH Pascal J. Thomas

Hà Nội – Năm 2017

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan những kết quả được trình bày trong luận án này là trung thực và mới. Các kết quả của hai chương 1 & 2 thì đã được công bố ở các tạp chí Toán học trong và ngoài nước, các kết quả ở chương 3 là mới và chưa công bố ở tạp chí nào.

Các kết quả viết chung với GS Nikolai Nikolov và GS Pascal J. Thomas đã được sự đồng ý của các đồng tác giả khi đưa vào luận án.

Trần Đức Anh

Mục lục

Lời cam đoan 1
Mục lục 3
Lời cảm ơn 5
Danh mục ký hiệu 7
Mở đầu 9
Tổng quan 13
Chương 1 Về sự không tồn tại các đường cong $E-$Brody giới hạn **25**
1.1 Dẫn nhập 25
1.2 Sự không tồn tại các đường cong Brody giới hạn 26
Chương 2 Bài toán nâng ánh xạ từ đa dĩa đối xứng hóa không có điều kiện đạo hàm **31**
2.1 Tóm tắt nội dung 31
2.2 Các động cơ nghiên cứu và các phát biểu 32
2.2.1 Các định nghĩa 32
2.2.2 Các động cơ nghiên cứu 33
2.3 Những thu gọn đầu tiên của bài toán 35
2.4 Các điều kiện cần 35
2.5 Một công thức cho ánh xạ nâng 39
2.5.1 Dạng Jordan sửa đổi 39
2.5.2 Sai phân chia 41
2.5.3 Một ánh xạ nâng phân hình 41
2.5.4 Các tính toán cơ bản 42
2.6 Trường hợp $n \leq 5$ 44
2.6.1 Trường hợp $n = 4$ 45
2.6.2 Trường hợp $n = 5$ 48
2.7 Phản ví dụ cho công thức nâng khi $n \geq 6$ 51
Chương 3 Bài toán nâng ánh xạ từ đa dĩa đối xứng hóa có điều kiện đạo hàm bậc nhất **53**
3.1 Phát biểu bài toán 53
3.2 Những thu gọn đầu tiên của bài toán 54

3.3 Tích hộp 55
3.4 Những phân tích đầu tiên về bài toán 57
3.5 Các trường hợp của B_0 58
3.6 Ánh xạ tuyến tính liên kết L_{B_0,B_1}, các điều kiện và lược đồ chứng minh 59
3.7 Trường hợp thứ nhất của B_0 61
3.7.1 Trường hợp $\mathrm{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$ 66
3.7.2 Trường hợp $\mathrm{rank}(L_{B_0,B_1}) = 4$ 71
3.8 Trường hợp thứ hai của B_0 74
3.8.1 Trường hợp $\mathrm{rank}(L_{B_0,B_1}) = 2$ 77
3.8.2 Trường hợp $\mathrm{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$ 80
3.8.3 Trường hợp $\mathrm{rank}(L_{B_0,B_1}) = 4$ 82
3.9 Trường hợp thứ ba B_0 83
3.9.1 Trường hợp $\mathrm{rank}(L_{B_0,B_1}) = 2$ 86
3.9.2 Trường hợp $\mathrm{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$ 96
3.9.3 Trường hợp $\mathrm{rank}(L_{B_0,B_1}) = 4$. 103
Đánh giá và bàn luận các kết quả **115**
Kết luận 117
Kiến nghị về những nghiên cứu tiếp theo 121
Các bài báo đã được công bố và tiền ấn phẩm của tác giả . 123

Lời cảm ơn

Đầu tiên, tôi chân thành cảm ơn hai thầy đồng hướng dẫn là GS Đỗ Đức Thái và GS Pascal J. Thomas đã đồng ý hướng dẫn tôi thực hiện luận án, nhất là trong điều kiện kinh phí khó khăn và cũng như thủ tục hành chính phức tạp (do kết hợp cả hai thủ tục hành chính giữa Việt Nam và Pháp). Nghiên cứu trong điều kiện như vậy, về cơ bản là vất vả cho cả hai thầy lẫn học trò. Các ý tưởng cơ bản của các kết quả trong luận án đều được hình thành trong thời gian ngắn ở Pháp, bao gồm 1,5 + 3 + 3 tháng ở Pháp (tức gồm 3 lần sang Pháp theo kinh phí do Pháp tài trợ, và chủ yếu nguồn tài trợ đó là do GS Pascal J. Thomas tìm kiếm cũng như lo lắng các thủ tục hành chính). Chính vì vậy, khi đạt được bất kỳ kết quả nào trong quá trình tôi đều cảm thấy rất biết ơn các thầy đã tạo điều kiện làm việc trong thời gian đó.

Tôi cũng chân thành cảm ơn GS Gerd Dethloff và GS Hà Huy Khoái đã đồng ý phản biện luận án. Tôi cũng xin chân thành cảm ơn GS Nguyễn Quang Diệu, PGS Nguyễn Việt Dũng, PGS Trần Văn Tấn, PGS Sĩ Đức Quang, TS Ninh Văn Thu, TS Phạm Đức Thoan đã đồng ý tham gia hội đồng bảo vệ cấp bộ môn; GS Lê Mậu Hải, PGS Hà Huy Vui, PGS Phạm Hoàng Hiệp, PGS Jasmin Raissy đã đồng ý tham dự hội đồng bảo vệ cấp trường cho luận án của tôi.

Cuối cùng, kết quả công việc này không thể ra đời nếu không có sự giúp đỡ và chia sẻ trong công việc giảng dạy của các đồng nghiệp ở khoa Toán, sự chu đáo của gia đình, sự ủng hộ tinh thần từ các bạn bè.

Danh mục ký hiệu

- Ω_n : Quả cầu phổ đơn vị, tập hợp gồm tất cả các ma trận vuông cấp n có bán kính phổ bé hơn 1.
- $\mathbb{C}^{m,n}$ hoặc $\mathbb{C}^{m\times n}$: Tập các ma trận cỡ $m \times n$ với hệ số phức.
- Cho ma trận $A = (a_{ij})$. Khi đó a_{ij} được gọi là *hệ số* của A hoặc *hệ số đầu vào* của A. Đầy đủ hơn là: a_{ij} là *hệ số (đầu vào) ở vị trí* (i, j) của A.
- $\mathbb{G}_n$: đa đĩa đối xứng hóa chiều n.
- σ_i : Đa thức đối xứng sơ cấp thứ i. Khi viết $\sigma_i(M)$ với $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ ta hiểu theo hai cách: $\sigma_i(M)$ là đa thức đối xứng sơ cấp thứ i của các giá trị riêng của M. Cách thứ hai là: $\sigma_i(M)$ là hệ số bậc $n - i$ của đa thức đặc trưng của M (sai khác dấu).
- Tr : Vết của ma trận vuông, hoặc vết của tự đồng cấu tuyến tính.

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Các vấn đề được bàn trong luận án này đều là sự tiếp nối các công trình nghiên cứu của hai thầy hướng dẫn của nghiên cứu sinh là GS. TSKH Đỗ Đức Thái và GS. TSKH Pascal J. Thomas. Luận án gồm 3 chương.

Chương 1 bàn về các đa tạp phức không thuộc kiểu $E-$giới hạn. Đây là khái niệm do ba tác giả Đỗ Đức Thái, Mai Anh Đức và Ninh Văn Thu đặt ra trong bài báo [7] nhằm nghiên cứu câu hỏi về tính Zalcman của các đa tạp phức, được đặt ra trong bài báo của ba tác giả Đỗ Đức Thái, Phạm Nguyễn Thu Trang và Phạm Đinh Hương [8]. Các khái niệm và vấn đề này đều liên quan gần gũi tới tính (phi) chuẩn tắc của các họ ánh xạ chỉnh hình, tức là cũng gần gũi với tính hyperbolic và các tính chất được quan tâm của các đa tạp phức.

Chương 2 và chương 3 bàn về bài toán nâng ánh xạ chỉnh hình từ đa đĩa đối xứng hóa lên quả cầu phổ. Đây là bài toán phái sinh từ lý thuyết nội suy Nevanlinna-Pick phổ, một chủ đề mà GS. Pascal J. Thomas nghiên cứu nhiều năm. Quả cầu phổ Ω_n là tập các ma trận vuông phức cấp n mà có bán kính phổ bé hơn 1. Bài toán nội suy trong quả cầu phổ được nhiều người quan tâm là vì nó có cơ sở thực tiễn trong kỹ thuật, mà bản thân nghiên cứu sinh chưa tìm hiểu được kỹ càng. Ta có thể tham khảo tổng quan rất thú vị của GS. N. Young [23] cho những ứng dụng đó.

Tuy nhiên, quả cầu phổ là đối tượng tương đối khó nghiên cứu: về mặt hình học, nó không hề đẹp, về mặt giải tích hàm cũng không khá hơn bao nhiêu. Đây là một miền trong $\mathbb{C}^{n^2}$ và không bị chặn. Các kỹ thuật họ chuẩn tắc không chạy được trong không gian này. Quãng năm 2000, hai tác giả J. Agler và N. Young đã đề ra nghiên cứu một miền phái sinh từ quả cầu phổ, đó là đa đĩa đối xứng hóa $\mathbb{G}_n$. Ta có thể xem bài báo [1] cho đối tượng này.

Ta có thể hiểu đa đĩa đối xứng hóa $\mathbb{G}_n$ là tập hợp ghi chép lại phổ của các ma trận "một cách liên tục". Đây là một tập bị chặn và là tập siêu lồi theo nghĩa giải tích phức các miền. Tức là tập hợp này đem lại hi vọng rằng bài toán nội suy sẽ có nhiều tiến triển hơn.

Cách làm của J. Agler và N. Young là thay vì xét bài toán nội suy trong

quả cầu phổ thì ta chiếu xuống đa đĩa đối xứng hóa và xét bài toán nội suy trong đó, và sau đó tìm cách quay trở lại quả cầu phổ, mà sau này trong luận án gọi là bài toán nâng từ đa đĩa đối xứng hóa.

Thực tế thì quả cầu phổ và đa đĩa đối xứng hóa đã thu hút được rất nhiều nhà nghiên cứu ở khắp nơi, đặc biệt là các nhà toán học Ba Lan. J. Agler và N. Young xuất phát nghiên cứu luôn là từ quan điểm lý thuyết toán tử. Tuy nhiên, với bài toán nội suy trong quả cầu phổ (hay bài toán Nevanlinna-Pick phổ) thì phương pháp toán tử nói chung gặp trở ngại đáng kể và khó tiến triển. Các nhà toán học Ba Lan thuộc phái giải tích miền nhìn nhận bài toán theo kiểu giải tích phức miền, và họ đạt được nhiều kết quả. Thầy đồng hướng dẫn của tôi cũng đóng góp được ít nhiều kết quả và cả quan điểm thuần túy giải tích phức để giải quyết bài toán nội suy này. Bài toán nâng ánh xạ từ đa đĩa đối xứng hóa là bài toán tìm điều kiện cần và đủ để có thể nâng một đĩa chỉnh hình trong $\mathbb{G}_n$ lên Ω_n. Đây là bài toán thú vị và có thể đem lại một lượng ứng dụng đáng kể nếu nó được giải quyết một cách trọn vẹn.

Với những động cơ như thế, chúng tôi đã cố gắng nghiên cứu theo hướng đó, và hi vọng các kết quả trình bày trong luận án giúp làm sáng tỏ thêm phần nào các câu hỏi được bàn ở trên.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận án gồm:

(i) Mở rộng kết quả của ba tác giả Đỗ Đức Thái, Mai Anh Đức và Ninh Văn Thu [7].

(ii) Đưa ra công thức nâng cụ thể cho bài toán nâng ánh xạ không có điều kiện đạo hàm với chiều $n \leq 5$ và chỉ ra phương pháp nâng mà tác giả Pascal J. Thomas đưa ra không hoạt động với $n \geq 6$.

(iii) Nghiên cứu bài toán nâng ánh xạ với điều kiện đạo hàm bậc 1 cho trước trong chiều $n = 4$. Tìm cách đưa ra dạng điều kiện "dễ sử dụng" hơn so với ba tác giả trước đó là N. Nikolov, P. Pflug và P. J. Thomas [13].

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là các không gian không thuộc kiểu $E-$giới hạn, quả cầu phổ và đa đĩa đối xứng hóa.

4. Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp nghiên cứu trong luận án là khảo sát kỹ các lý luận của các tác giả trước đó như của ba tác giả Đỗ Đức Thái, Mai Anh Đức và Ninh Văn Thu, hoặc ba tác giả N. Nikolov, P. Pflug và P. J. Thomas; rồi từ đó tìm cách mở rộng phương pháp của họ.

Trừ chương 1, luận án thiên về tính toán và phương pháp tính toán. Vì thế luận án sử dụng nhiều các công cụ cơ bản của giải tích cổ điển như chuỗi, bán kính chuỗi hội tụ, v.v.; đại số tuyến tính về ma trận (giá trị riêng, vector riêng, đa thức đặc trưng, dạng Jordan, dạng hữu tỷ v.v.), hệ phương trình và cách tuyến tính hóa các đa thức v.v.; kiến thức cơ bản về đa thức nội suy (công thức nội suy Newton và Hermite) v.v.

5. Kết cấu luận án

Về cơ bản, luận án ngoài các mục theo quy định thì gồm 3 chương chính:

(i) Chương 1 bàn về các không gian không thuộc kiểu $E-$giới hạn, hay các không gian không có các đường cong Brody giới hạn.

(ii) Chương 2 nghiên cứu bài toán nâng ánh xạ không có điều kiện đạo hàm với công thức nâng cụ thể trong trường hợp chiều $n \leq 5$ và chỉ ra phản ví dụ nói rằng công thức nâng đó không hoạt động khi chiều $n \geq 6$.

(iii) Chương 3 nghiên cứu bài toán nâng ánh xạ với đạo hàm bậc 1 cho trước ở chiều $n = 4$.

Tổng quan

Như đã nói trong phần Mở đầu, luận án gồm 3 chương chính, mỗi chương bàn về một bài toán cụ thể thuộc chủ yếu vào hai chủ đề: các đường cong Brody giới hạn và các bài toán nâng từ đa đĩa đối xứng hóa (có và không có điều kiện đạo hàm). Chúng tôi sẽ trình bày chi tiết thành hai mục như sau.

Các đường cong Brody giới hạn

Đường cong Brody giới hạn là khái niệm được đặt ra bởi ba tác giả Đỗ Đức Thái, Mai Anh Đức và Ninh Văn Thu trong bài báo [7] liên quan gần gũi tới các họ chuẩn tắc hoặc phi chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh hình. Cụ thể hơn, có lẽ các tác giả này xuất phát từ định lý nổi tiếng sau của Zalcman năm 1975 [24, 25].

Định lý Zalcman *Cho $\{f_j \colon \mathbb{D} \to \mathbb{P}^1\}_{j=1}^{\infty}$ là một họ các hàm phân hình. Nếu họ này là không chuẩn tắc đối với metric cầu của $\mathbb{P}^1$ thì ta có thể trích ra được một dãy con rồi tham số hóa afin lại để thu được một dãy con hội tụ tới một hàm nguyên khác hằng có đạo hàm cầu bị chặn.*

Cụ thể, tồn tại dãy con $\{f_{j_k}\}_{k\geq 1}$, điểm $z_0 \in \mathbb{D}$, dãy $z_k \in \mathbb{D}$ và các số dương $\rho_k \to 0^+$ sao cho dãy hàm

$$f_{j_k}(z_k + \rho_k \zeta) \rightrightarrows g(\zeta)$$

hội tụ đều trên các tập compact trong $\mathbb{C}$, trong đó g là hàm phân hình khác hằng và g có thể được chọn sao cho đạo hàm cầu

$$g^\sharp(z) = \frac{|g'(z)|}{1 + |g(z)|^2} \leq g^\sharp(0) = 1.$$

Hàm g như trong định lý Zalcman có đạo hàm cầu bị chặn, và ta gọi nó là một đường cong Brody, theo tên gọi của nhà Toán học R. Brody từ bài báo nổi tiếng của ông [5] về tiêu chuẩn tính hyperbolic của đa tạp phức

compact. Cũng chính từ bài báo đó của R. Brody, đường cong Brody cũng là một chủ đề được một số lượng các nhà Toán học quan tâm (như J. Duval, A. Eremenko, M. Tsukamoto, J. Winkelmann v.v.) và đem tới một số kết quả rất thú vị.

Ba tác giả Đỗ Đức Thái, Mai Anh Đức và Ninh Văn Thu [7] có lẽ xuất phát từ định lý Zalcman và đặt ra khái niệm không gian loại $E-$ giới hạn nhằm mục đích tìm ý tưởng giải quyết giả thuyết về tính Zalcman của không gian $\mathbb{C}^n$ được đặt ra trong bài báo ba tác giả Đỗ Đức Thái, Phạm Nguyễn Thu Trang, Phạm Đinh Hương [8]. Ta trình bày sơ qua các định nghĩa.

Định nghĩa không gian loại $E-$giới hạn *Cho X là một đa tạp phức được trang bị một metric Hermit E. Đa tạp phức X được gọi là thuộc* ***loại* E*-giới hạn*** *nếu X thỏa mãn các điều sau:*

Với mỗi họ không chuẩn tắc $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\Delta, X)$, trong đó Δ là một miền trong $\mathbb{C}$ và $\mathrm{Hol}(\Delta, X)$ là tập tất cả các ánh xạ chỉnh hình từ Δ vào X, sao cho $\mathcal{F}$ không chứa các dãy phân kỳ compact, tồn tại các dãy $\{p_j\} \subset \Delta$ với $p_j \to p_0 \in \Delta$ khi $j \to \infty$, $\{f_j\} \subset \mathcal{F}, \{\rho_j\} \subset \mathbb{R}$ với $\rho_j > 0$ và $\rho_j \to 0^+$ khi $j \to \infty$ sao cho

$$g_j(\xi) := f_j(p_j + \rho_j \xi), \xi \in \mathbb{C},$$

hội tụ đều trên các tập compact của $\mathbb{C}$ tới một đường cong E-Brody khác hằng $g : \mathbb{C} \to X$.

Khái niệm "phân kỳ compact" chỉ là một điều kiện topo đơn giản và cần thiết vì tình huống ở đây khác với định lý Zalcman là không gian đích X không còn là tập compact như đường thẳng xạ ảnh $\mathbb{P}^1$.

Định nghĩa không gian Zalcman *Đa tạp phức X được gọi là không gian Zalcman nếu X thỏa mãn điều sau:*

Với mỗi miền $\Omega \subset \mathbb{C}^m$ và với mỗi họ phi chuẩn tắc $\mathcal{F}$ các ánh xạ chỉnh hình từ Ω vào X thỏa mãn $\mathcal{F}$ không phân kỳ compact, tồn tại một dãy các điểm $\{p_j\} \subset \Omega$ với $p_j \to p_0 \in \Omega$, $\{f_j\} \subset \mathcal{F}$, $\{\rho_j\} \subset \mathbb{R}^+$ với $\rho_j \to 0^+$ sao cho

$$g_j(\zeta) = f_j(p_j + \rho_j \zeta), \ \zeta \in \mathbb{C}^m$$

hội tụ đều trên các tập compact trong $\mathbb{C}^m$ tới một đường cong nguyên khác hằng $g \colon \mathbb{C}^m \to X$.

Sự khác biệt giữa hai khái niệm trên nằm ở ràng buộc đối với đường cong g : một cái có đạo hàm bị chặn, một cái không có điều kiện nào cả.

Các tác giả trong bài báo [8] nêu ra giả thuyết về tính Zalcman như sau:

Giả thuyết tính Zalcman Phải chăng $\mathbb{C}^n$ là không gian Zalcman với mọi $n \geq 1$?

Các tác giả trong bài báo đó đã chứng minh được $\mathbb{C}^1$ là không gian Zalcman nhờ tính chất đặc biệt $\mathbb{C}^1 = \mathbb{P}^1 - \{\infty\}$. Kỹ thuật chứng minh khá đơn giản: Hàm g được xây dựng thông qua giới hạn nên miền giá trị của nó hoặc là nằm trong $\mathbb{C}^1$ hoặc là nằm hẳn trong biên của $\mathbb{C}^1$ (là một điểm trong $\mathbb{P}^1$). Do g khác hằng, nên điều sau không thể xảy ra. Từ kỹ thuật chứng minh đó thì ta có thể thấy là nếu biên là đa tạp hyperbolic thì kết quả vẫn đúng. Nhưng rất tiếc, từ $n \geq 2$, biên của $\mathbb{C}^n$ trong $\mathbb{P}^n$ không còn hyperbolic, nên hướng đi đó phải tạm dừng.

Để tiếp tục nghiên cứu bài toán về tính Zalcman của $\mathbb{C}^n$, ba tác giả Đỗ Đức Thái, Mai Anh Đức và Ninh Văn Thu đã đặt ra khái niệm mạnh hơn không gian Zalcman, và chứng minh được hai kết quả chính sau.

Định lý 1.6 của [7] $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ *không thuộc loại E-giới hạn với mọi hàm độ dài E trên $\mathbb{C}^n$.*

Định lý 1.7 của [7] $(\mathbb{C}^*)^2$ *không thuộc loại ds^2_{FS}-giới hạn, trong đó ds^2_{FS} là metric Fubini-Study trên $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.*

Chứng minh Định lý 1.6 khá đơn giản, cách làm của ba tác giả là tìm một đường cong khác hằng $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n-1}$ và sau đó lý luận dựa trên sự tồn tại đường cong đó. Mặt khác, chứng minh định lý 1.7 của ba tác giả phức tạp hơn và kỹ thuật.

Dựa vào cách chứng minh của ba tác giả đối với định lý 1.6, chúng tôi nhận định rằng sự tồn tại đường cong nguyên khác hằng trong $\mathbb{C}^{n-1}$ là cốt yếu và tìm cách cải thiện lập luận ở đây. Từ đó chứng minh được kết quả sau:

Kết quả chính của chương 1 *Cho X là đa tạp phức có chứa một đường cong nguyên, tức là một đường cong chỉnh hình khác hằng $f\colon \mathbb{C} \to X$. Khi đó, cả hai đa tạp phức $\mathbb{C} \times X$ và $\mathbb{C}^* \times X$ đều không thuộc loại $E-$giới hạn với mọi metric Hermit E tương ứng trên $\mathbb{C} \times X$ và $\mathbb{C}^* \times X$.*

Phương pháp chứng minh là hoàn toàn cổ điển. Chúng tôi xây dựng một hàm chỉnh hình từ $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{C}$ nhận các giá trị và đạo hàm bậc 1 tại các điểm cho trước, sao cho giá trị và đạo hàm phải không có ràng buộc nào cả. Để làm được điều đó, chúng tôi bắt chước hoàn toàn cách chứng minh của định lý Mittag-Leffler, đó là dùng lý thuyết bó: xây dựng các mầm hàm địa phương và chứng minh các mầm hàm có thể dán lại được nhờ đối đồng điều bậc 1 của bó triệt tiêu. Tất cả những điều này hoàn toàn có thể thực hiện được khi bó là nhất quán (tiếng Anh: coherent) và không gian nằm dưới là Stein.

Một bình luận nhỏ: E ở đây là metric, tức mạnh hơn so với kết quả đầu của ba tác giả. Chúng tôi cần E là metric để có thể áp dụng bất đẳng thức tam giác, từ đó đánh giá được các đại lượng mong muốn.

Bài toán nâng ánh xạ từ đa đĩa đối xứng hóa

Bài toán nâng ánh xạ từ đa đĩa đối xứng hóa là bài toán phái sinh từ các bài toán nội suy Nevanlinna-Pick và Carathéodory-Fejér, vì thế đầu tiên chúng tôi trình bày sơ qua định nghĩa và thuật ngữ trong lý thuyết nội suy này.

Cho $X \subset \mathbb{C}^n$ và $Y \subset \mathbb{C}^m$ là các miền. Cho $p_1, p_2, \ldots, p_N$ là N điểm phân biệt trong X và $q_1, \ldots, q_N$ là N điểm trong Y.

Bài toán nội suy Nevanlinna-Pick *Bài toán tìm các điều kiện (cần và đủ) sao cho tồn tại ánh xạ chỉnh hình $f\colon X \to Y$ sao cho $f(p_i) = q_i$ với $1 \le i \le N$ được gọi là **bài toán nội suy Nevanlinna-Pick**.*

Ta có thể gọi các điểm p_i là các *điểm nội suy* hoặc các *mốc nội suy*; còn các giá trị q_i là các *giá trị nội suy*.

Bài toán nội suy Carathéodory-Fejér *Trong bài toán nội suy Nevanlinna-Pick, nếu ta đòi hỏi thêm điều kiện về đạo hàm của f tại các mốc nội suy, ví dụ $f'(p_i)$, $f''(p_i)$, v.v. nhận các giá trị cụ thể, thì bài toán đó được gọi là **bài toán nội suy Carathéodory-Fejér**.*

Ta đưa ra hai ví dụ về bài toán nội suy kiểu này.

Bài toán nội suy cổ điển *Với $X = Y = \mathbb{D}$ đĩa đơn vị mở trong $\mathbb{C}$, bài toán nội suy Nevanlinna-Pick (hoặc Carathéodory-Fejér) tương ứng được gọi là **bài toán nội suy Nevanlinna-Pick (t.ứ. Carathéodory-Fejér) cổ điển** đã được giải quyết trọn vẹn bởi Rolf Nevanlinna (1919) và Georg Pick (1916). Cụ thể là cho $\lambda_1, \ldots, \lambda_N, z_1, \ldots, z_N \in \mathbb{D}$, (trong đó $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ phân biệt) khi đó tồn tại một hàm chỉnh hình $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ sao cho $f(\lambda_i) = z_i$ với $1 \le i \le N$ khi và chỉ khi ma trận Pick*

$$\left(\frac{1 - \bar{z}_j z_i}{1 - \bar{\lambda}_j \lambda_i}\right)_{1 \le i,j \le N}$$

là nửa xác định dương.

Bài toán nội suy cổ điển không những được giải quyết bằng các phương pháp khá đơn giản như của R. Nevanlinna và G. Pick (các chứng minh này có thể tìm thấy ở cuốn sách của J. B. Garnett[9]), mà còn được nhìn và giải

quyết rất thành công từ phương pháp lý thuyết toán tử, khởi đầu bởi D. Sarason [18]. Chính từ bài báo của D. Sarason, lý thuyết nội suy Nevanlina-Pick (và các bài toán liên quan) có thêm một bước tiến dài theo kiểu lý thuyết toán tử và nhiều bài toán được giải quyết theo hướng này.

Bài toán nội suy hiện nay được quan tâm là *bài toán nội suy phổ* mà phát biểu của nó là như sau.

Bài toán nội suy phổ *$X = \mathbb{D}$ và $Y = \Omega_n$ quả cầu phổ (tức là tập các ma trận vuông $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ có bán kính phổ nhỏ hơn 1). Bài toán này được gọi là* ***bài toán Nevanlinna-Pick (t.ứ. Carathéodory-Fejér) phổ****.*

Bài toán này được nhiều người quan tâm là vì nó có cơ sở thực tế là bài toán xuất phát từ lý thuyết điều khiển mạnh (tiếng Anh: Robust control theory), ta có thể tham khảo bài tổng quan của N. Young [23]. Tuy vậy, bài toán nội suy phổ là bài toán rất khó so với những bài toán trước đó (nội suy trong đĩa đơn vị, hoặc quả cầu đơn vị trong không gian định chuẩn). Quả cầu phổ Ω_n không có hình học đẹp. Nó là miền không bị chặn, không phải tập lồi. Phương pháp lý thuyết toán tử cũ [3] áp dụng trên quả cầu phổ đạt tới giới hạn và khó đưa ra được các điều kiện có thể tính toán được.

Quãng năm 2000, J. Agler và N. Young [1] đề xuất một hướng làm mới tiếp cận tới bài toán này với mục đích có thể đưa ra các điều kiện tính toán rõ ràng hơn. Cụ thể là hai nhà toán học đưa *đa đĩa đối xứng hóa*, ký hiệu là $\mathbb{G}_n$, có định nghĩa như sau.

Với mỗi ma trận $M \in \Omega_n$, ta xét đa thức đặc trưng

$$P_M(t) = \det(M - tI) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \sigma_i(M) t^i.$$

Đặt

$$\pi(M) = (\sigma_1(M), \sigma_2(M), \ldots, \sigma_n(M))$$

và

$$\mathbb{G}_n = \pi(\Omega_n).$$

Ánh xạ π được gọi là *phép chiếu* từ Ω_n lên $\mathbb{G}_n$ (hoặc *ánh xạ đối xứng hóa*). $\sigma_i(M)$ cũng có thể định nghĩa là đa thức đối xứng sơ cấp thứ i của các giá trị riêng của M. Đa đĩa đối xứng hóa $\mathbb{G}_n$ có thể coi là một cách ghi chép thông tin phổ của ma trận một cách liên tục (hoặc chỉnh hình).

Ý tưởng của hai tác giả là chuyển đổi bài toán Nevanlinna-Pick phổ về bài toán nội suy trong đa đĩa đối xứng hóa, với hi vọng rằng: đa đĩa đối xứng hóa là miền bị chặn, siêu lồi và hyperbolic v.v. thì có thể dễ tiếp cận hơn so với quả cầu phổ. Tuy vậy, mọi chuyện vẫn còn rất khó khăn, ngay cả bài toán nội suy từ 3 điểm trở lên rất hiếm khi được đề cập.

Gần đây, nhóm các nhà toán học phái Ba Lan như Jarnicki, Zwonek, Pflug, Edigarian, Kosinski, Warzawski v.v. và các nhà toán học khác như N. Nikolov, P. J. Thomas, Nguyễn Văn Trào v.v. đã tích cực sử dụng công cụ giải tích phức để nghiên cứu bài toán nội suy và cũng đạt được một số kết quả. Điều này là mới là vì J. Agler và N. Young xuất phát điểm luôn đề cập bài toán nội suy dưới cách tiếp cận toán tử, và cách tiếp cận kiểu này gần như không thể tiến triển với bài toán Nevanlinna-Pick phổ. Số lượng bài báo nghiên cứu bài toán Nevanlinna-Pick phổ theo hướng này lên tới vài chục bài, chứng tỏ hướng đi theo kiểu giải tích phức thuyết phục được nhiều nhà toán học.

Một cách tự nhiên, nếu chúng ta tiếp cận bài toán nội suy phổ bằng cách chiếu quả cầu phổ Ω_n xuống $\mathbb{G}_n$ thì sẽ phải có một quá trình ngược lại: đi từ $\mathbb{G}_n$ lên Ω_n. Bài toán đó sẽ được gọi là bài toán nâng từ đa đĩa đối xứng hóa $\mathbb{G}_n$, chủ đề của hai chương 2 và 3 của luận án này.

Phát biểu bài toán nâng *Cho $B_0 \in \Omega_n$ và $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{G}_n$ là một đĩa chỉnh hình có $\varphi(0) = \pi(B_0)$. Tìm điều kiện cần và đủ để ta có thể tìm thấy một ánh xạ chỉnh hình $\Phi\colon \omega \to \Omega_n$ với $\Phi(0) = B_0$ và $\pi \circ \Phi = \varphi$ trong đó ω là một lân cận của $0 \in \mathbb{D}$?*

Ánh xạ Φ như thế được gọi là *ánh xạ nâng* của φ và khi đó φ được nói là *nâng được (địa phương)*. Ta gọi bài toán này là *bài toán nâng* ứng với bài toán Nevanlinna-Pick phổ hoặc *bài toán nâng từ đa đĩa đối xứng hóa không có điều kiện đạo hàm*.

Nếu ta đòi hỏi thêm $\Phi'(0) = B_1$ với $B_1 \in \mathbb{C}^{n,n}$ là ma trận cho trước, thì bài toán trở thành *bài toán nâng từ đa đĩa đối xứng hóa với đạo hàm bậc nhất cho trước*.

Ta có nhận xét nhỏ là: Nếu Φ là ánh xạ nâng thì $C^{-1} \cdot \Phi \cdot C$ cũng là ánh xạ nâng với C là ma trận khả nghịch, hoặc một hàm chỉnh hình nhận giá trị ma trận khả nghịch. Chính vì thế, ta luôn có thể coi $B_0 = \Phi(0)$ là ma trận ở dạng Jordan để cho tiện lý luận.

Chúng tôi trình bày sơ lược các nghiên cứu về bài toán nâng trong một mục tiếp sau đây.

Sơ lược các nghiên cứu về bài toán nâng không có điều kiện đạo hàm

Bản thân J. Agler và N. Young là những người đầu tiên nghiên cứu bài toán nâng [1], nhưng kết quả của họ đạt được là rất sơ lược, cụ thể là với chiều $n = 2$. Sau đó S. Petrovic [16] xét bài toán với chiều $n = 3$ chủ yếu nhằm trả lời câu hỏi của Bercovici chứ không chủ đích nghiên cứu bài toán

nâng. Thực tế thì NCS và thầy đồng hướng dẫn Pascal J. Thomas chỉ biết tới bài báo của S. Petrovic sau khi hoàn thành bài báo [15].

Bài toán này đạt được tiến bộ rõ ràng hơn với bài báo của P. J. Thomas và Nguyễn Văn Trào [19], trong đó hai tác giả này nghiên cứu bài toán nâng không có đạo hàm với ma trận giá trị nội suy B_0 là lũy linh (điều này cũng tương đương với điều kiện B_0 có đúng một giá trị riêng, nhờ biến đổi Möbius). Cũng chính từ bài báo này mà chúng tôi trình bày được điều kiện cần địa phương cho bài toán nâng ở hình thức rõ ràng như sau.

Điều kiện cần và đủ cho bài toán nâng không có đạo hàm, Mệnh đề 2.11 của luận án *Cho $\varphi \in Hol(\omega, \mathbb{G}_n)$, với ω là một lân cận của $\alpha \in \mathbb{D}$. Cho A_1 như trong (2.1). Các khẳng định sau là tương đương:*

(a) Tồn tại $\omega' \subset \mathbb{D}$ một lân cận của α và $\Phi \in \mathrm{Hol}(\omega', \Omega_n)$ sao cho

$$\pi \circ \Phi = \varphi, \Phi(0) = A_1;$$

(b) Ánh xạ φ thỏa mãn

$$\frac{d^k P_{[\varphi(\zeta)]}}{dt^k}(\lambda_j) = O((\zeta - \alpha)^{d_{m_j - k}(B_j)}), \quad 0 \le k \le m_j - 1, 1 \le j \le s, \quad (1)$$

trong đó d_i như trong Định nghĩa 2.10.

(c) Tồn tại $\omega' \subset \mathbb{D}$ một lân cận của α và $\Phi \in Hol(\omega', \Omega_n)$ sao cho

$$\pi \circ \Phi = \varphi, \Phi(0) = A_1 \text{ và } \Phi(\zeta) \text{ cyclic với } \zeta \in \omega' \setminus \{\alpha\}.$$

Trong này, chúng tôi xin phép không trình bày chi tiết định nghĩa của các số d_i, ta chỉ cần hiểu đơn giản là các số d_i là các số đặc trưng cho dạng Jordan của ma trận A_1 (cũng chính là B_0 như đã bàn ở trên, nhưng vì lý do trùng ký hiệu nên tại đó chúng tôi thay đổi chút cho tiện trình bày).

Như vậy, về mặt địa phương, bài toán nâng không có đạo hàm đã được giải quyết trọn vẹn. Một cách tự nhiên, bài toán nâng toàn cục là đối tượng nghiên cứu tiếp theo.

Tác giả P. J. Thomas trong quá trình nghiên cứu đã tìm ra một công thức nâng dường như hiệu quả để tấn công bài toán này. Trước khi trình bày công thức của P. J. Thomas, chúng tôi nhắc lại chút là: Ánh xạ Φ là ánh xạ nâng của φ khi và chỉ khi với mỗi ζ, đa thức đặc trưng của $\Phi(\zeta)$ có các hệ số trùng với các tọa độ của $\varphi(\zeta)$ (sai khác dấu). Công thức nâng của P. J. Thomas là như sau:

$$\Phi(\zeta) := \begin{pmatrix} \varphi_{1,1}(\zeta) & f_2(\zeta) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_{2,2}(\zeta) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & f_{n-1}(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_{n-1,n-1}(\zeta) & f_n(\zeta) \\ \varphi_{n,1} & \varphi_{n,2} & \cdots & \varphi_{n,n-1} & \varphi_{n,n} \end{pmatrix},$$

trong đó $f_2, \ldots, f_n$ được chọn cố định, $\varphi_{1,1}, \ldots, \varphi_{n-1,n-1}$ là các hàm cần tìm. Khi đó

$$\varphi_{n,\ell} := -\frac{\Delta^{\ell-1} P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \ldots \varphi_{\ell,\ell})}{\prod_{k=\ell+1}^{n} f_k(\zeta)}, \quad 1 \le \ell \le n-1$$

và

$$\varphi_{n,n} := -\Delta^{n-1} P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \ldots, \varphi_{n-1,n-1}, 0) = \varphi_1 - (\varphi_{1,1} + \cdots + \varphi_{n-1,n-1}).$$

Việc đề xuất này của P. J. Thomas là do kinh nghiệm và trực giác của tác giả làm việc về vấn đề nội suy (bản thân GS. P. J. Thomas là chuyên gia về lý thuyết nội suy). Công thức nâng ở trên khi thay vào đa thức đặc trưng $\det(tI - \Phi(\zeta))$ đem lại hình thức y hệt công thức nội suy Newton, và vì thế tác giả đã hy vọng rằng công thức này sẽ cho phép giải quyết bài toán nâng toàn cục.

Có một lý do nữa khiến P. J. Thomas quan tâm tới công thức nâng kiểu như này là nó cho phép giải quyết cả bài toán nâng tại nhiều điểm, và nó phục vụ cả động cơ nghiên cứu tính liên tục của hàm Lempert trong quả cầu phổ.

Tuy nhiên, chúng tôi chỉ ra rằng *công thức nâng đó chỉ có thể hoạt động ở chiều $n \le 5$ và thất bại ở chiều $n \ge 6$*. Đây cũng là **kết quả chính trong chương 2** của luận án, đồng thời được công bố ở bài báo [15].

Nhân tiện, cũng phải nói là kết quả lý thuyết về điều kiện cần và đủ của chương này đều bị phủ bởi kết quả của R. Andrist [2], một nhà Toán học Thụy Sĩ. R. Andrist đã chứng minh được điều kiện cần và đủ địa phương của chúng tôi đưa ra cũng là điều kiện cần và đủ toàn cục bằng cách sử dụng lý thuyết Oka-Gromov-Forstnerič (còn gọi là lý thuyết đồng luân chỉnh hình). Đây là lý thuyết khó và vượt qua khả năng hiểu biết của NCS, nên chúng tôi không thể bình luận gì thêm. Tuy nhiên, kết quả mà chúng tôi đạt được vẫn có giá trị nhất định và có thể đăng được báo là vì các kết quả này đưa ra công thức nâng cụ thể.

Cũng do kết quả của R. Andrist, bài toán nâng không có điều kiện đạo hàm về mặt lý thuyết đã được giải quyết trọn vẹn. Vì thế, việc tiếp tục triển khai nghiên cứu sang bài toán nâng có điều kiện đạo hàm là tự nhiên.

Sơ lược các nghiên cứu về bài toán nâng có điều kiện đạo hàm bậc nhất

Các kết quả đầu tiên về bài toán nâng từ đa đĩa đối xứng hóa có điều kiện đạo hàm thuộc về A. N. Huang, S. A. M. Marcantognini, N. Young năm 2006 [12] và N. Nikolov, P. Pflug, P. J. Thomas năm 2011 [13].

Huang, Marcantognini và Young chứng minh được rằng nếu giá trị nội suy B_0 là cyclic, thì ta luôn nâng được ánh xạ φ. Ta có thể hiểu ma trận cyclic theo ba cách như thế này:

- Ma trận B_0 là cyclic nếu dạng chính tắc hữu tỷ của nó chỉ có một khối duy nhất.

- Ma trận B_0 là cyclic nếu, với mỗi giá trị riêng λ của B_0, chỉ có đúng một khối Jordan ứng với λ.

- Ma trận B_0 là cyclic nếu B_0 là điểm chính quy (theo nghĩa giải tích) của ánh xạ đối xứng hóa $\pi\colon \Omega_n \to \mathbb{G}_n$.

Như vậy, nếu B_0 không là điểm kỳ dị (theo nghĩa ánh xạ khả vi), thì không có thêm điều kiện để có thể nâng được φ (ngoài điều kiện hiển nhiên $\pi(B_0) = \varphi(0)$ và $\mathrm{D}\pi_{B_0}(B_1) = \varphi'(0)$).

Bài báo thứ hai được nêu ở trên nghiên cứu tình huống mà B_0 là ma trận phi-cyclic ở chiều $n \leq 3$. Cách làm của các tác giả về cơ bản là dự đoán một công thức nâng giống như công thức nâng được đề xuất bởi P. J. Thomas mà đã bàn ở trên, rồi sau đó thay vào công thức nâng vào đa thức đặc trưng để tính toán và chỉnh sửa các giá trị đầu vào của công thức nâng. Chính cách làm như vậy khiến cho các tác giả chỉ có thể giải quyết bài toán trong trường hợp chiều $n \leq 3$, thứ hai là cách làm đó có hạn chế về hình thức trình bày điều kiện cần và đủ. Chính vì thế, thầy đồng hướng dẫn P. J. Thomas đã yêu cầu NCS khảo sát bài bài đó và tìm cách làm rõ hơn bản chất các điều kiện được nêu ra trong bài báo đó.

Nội dung chương 3 của luận án trình bày nghiên cứu về bài toán nâng từ đa đĩa đối xứng hóa có điều kiện đạo hàm bậc nhất ở chiều $n = 4$. Quan điểm của chúng tôi trong việc tiếp cận bài toán này là như sau:

- Phương pháp nâng cũ của P. J. Thomas trong bài toán nâng không có điều kiện đạo hàm không thể hoạt động trong bài toán nâng có điều kiện đạo hàm.

- Phương pháp biến đổi sơ cấp trong bài báo [13] tìm cách đưa B_0 và B_1 về dạng đơn giản rất khó có thể tổng quát.

- Phương pháp của Huang, Marcantognini và Young [12] chỉ hoạt động đối với B_0 cyclic.
- Cách tiếp cận mới cần thống nhất cả hai bài toán nâng có và không có điều kiện đạo hàm, chứ không coi hai bài toán này là riêng biệt.

Chúng tôi chỉ tập trung nghiên cứu bài toán nâng địa phương với hy vọng rằng nếu giải quyết trọn vẹn bài toán nâng địa phương, thì ta có thể giải quyết được bài toán nâng toàn cục theo cách làm của R. Andrist [2].

Sau đây chúng tôi trình bày sơ lược cách tiếp cận bài toán nâng có điều kiện đạo hàm bậc nhất trong chiều $n = 4$.

Cách tiếp cận bài toán nâng có điều kiện đạo hàm bậc nhất trong chiều n = 4

Đầu tiên, B_0 luôn có thể được quy về trường hợp lũy linh.

Sau đó, chúng tôi quan niệm bài toán nâng ánh xạ là hệ phương trình các đạo hàm của Φ tại $\zeta = 0$. Cụ thể là: hai hàm chỉnh hình $\pi \circ \Phi$ và φ bằng nhau khi và chỉ khi đạo hàm mọi cấp tại $\zeta = 0$ phải bằng nhau.

Ký hiệu $B_k = \Phi^{(k)}(0)$ với $k \geq 0$. Để trình bày các phương trình ta cần phải (đa) tuyến tính hóa các hàm $\sigma_m(M)$ sao cho

$$\sigma_m(M) = \frac{1}{m!} \underbrace{M \cdot M \cdot \ldots \cdot M}_{m \text{ lần}}.$$

Như vậy nếu viết $A_1 A_2 \ldots A_k$, với A_i là các ma trận vuông cùng cấp, thì ta cần hiểu đó là dạng đa tuyến tính nhận được tuyến tính hóa đa thức σ_k, mà $\sigma_k(M)$ chính là đa thức đối xứng hóa thứ k của các giá trị riêng của ma trận vuông M.

Nhắc lại $\varphi_m = \sigma_m(\Phi)$. Như vậy, đạo hàm hai vế tại $\zeta = 0$ ở mọi cấp k đều phải bằng nhau, và ta thu được các phương trình theo $B_2, B_3, \ldots$ như sau:

$$\varphi_m^{(k)}(0) = \frac{1}{m!} \sum_{\substack{j_1 + j_2 + \ldots + j_m = k \\ j_i \geq 0}} \frac{k!}{j_1! j_2! \ldots j_m!} B_{j_1} B_{j_2} \ldots B_{j_m}.$$

Ta tạm gọi các phương trình này là phương trình nâng. Từ bài toán nâng không có điều kiện đạo hàm, ta biết rằng nếu φ nâng được thì

$$\varphi_j(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{d_j}) \text{ với } 1 \leq j \leq n.$$

Điều này cho ta hệ quả.

Hệ quả Giả sử $B_0 \in \mathbb{C}^{n,n}$ lũy linh và $d_1, \ldots, d_n$ là các số liên kết của nó. Với $M_1, M_2, \ldots, M_k \in \mathbb{C}^{n,n}$ và $d_i \geq k+1$, ta luôn có

$$\underbrace{B_0 B_0 \ldots B_0}_{i-k \text{ lần}} M_1 M_2 \ldots M_k = 0.$$

Nhờ hệ quả, các phương trình nâng có dạng

$$\varphi_m^{(k+d_m-1)}(0) = \frac{(k+d_m-1)!}{k!} \frac{\overbrace{B_0 B_0 \ldots B_0}^{m-d_m \text{ lần}} \overbrace{B_1 B_1 \ldots B_1}^{d_m-1 \text{ lần}} B_k}{(m-d_m)!(d_m-1)!} + \ldots$$

trong đó các dấu chấm biểu diễn các hạng tử cấu tạo bởi B_i với $i < k$. Nếu ta quan niệm B_k là thông tin biết sau, còn các B_i với $i < k$ là các thông tin biết trước (hoặc đã biết), thì rõ ràng dạng phương trình như trên chính là dạng phương trình tuyến tính theo B_k. Điều này gợi ý là ta nên sắp xếp các phương trình tại (3.4) thành các nhóm n phương trình. Cụ thể là, đặt

$$\mathfrak{X}_k = \left\{ \frac{\varphi_1^{(k+d_1-1)}(0)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+d_1-1)}, \frac{\varphi_2^{(k+d_2-1)}(0)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+d_2-1)}, \ldots \right.$$
$$\left. , \ldots, \frac{\varphi_n^{(k+d_n-1)}(0)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+d_n-1)} \right\}.$$

Khi đó các phương trình của φ (3.4) chính là các tập $\mathfrak{X}_k$ với $k \geq 2$ (với $k = 0$, và 1, thì B_0 và B_1 được cho trước).

Bây giờ nếu ta xét ánh xạ tuyến tính sau $L_{B_0,B_1} \colon \mathbb{C}^{n,n} \to \mathbb{C}^n$ trong đó tọa độ thứ m của $L_{B_0,B_1}(M)$ với $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ được định nghĩa bởi công thức

$$\frac{\overbrace{B_0 B_0 \ldots B_0}^{m-d_m \text{ lần}} \overbrace{B_1 B_1 \ldots B_1}^{d_m-1 \text{ lần}} M}{(m-d_m)!(d_m-1)!}.$$

Ta gọi ánh xạ L_{B_0,B_1} này là *ánh xạ tuyến tính liên kết* với bài toán nâng (hoặc với dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$).

Bây giờ ta quan sát $\mathfrak{X}_k$ với $k \geq 2$. Nhận xét

$$\mathfrak{X}_k = L_{B_0,B_1}(B_k) + \ldots$$

trong đó các dấu chấm biểu thị cho các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k$.

Ta nhận xét là nếu $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = n$, tức là L_{B_0,B_1} có hạng cực đại, thì ta có thể tìm thấy một dãy $\{B_k\}_{k\geq 2}$ là nghiệm của các phương trình trong đó B_k cần phải được tìm trước B_{k+1}.

Tuy nhiên, điều này không đảm bảo sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\zeta^k$ trong khi điều này là cần thiết cho việc Φ chỉnh hình trong một lân cận của $\zeta = 0$. Ta sẽ bàn về điều này trong một lát nữa.

Ta nhận xét là nếu $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) < n$, thì điều này cho ta một quan hệ tuyến tính giữa các đại lượng của $\mathfrak{X}_k$. Cụ thể là B_k có thể bị triệt tiêu khỏi tổ hợp tuyến tính nào đó của các vế phải của (3.4) để sản xuất ra các phương trình không phụ thuộc vào B_k, tức là chỉ phụ thuộc vào B_0, B_1, ..., B_{k-1}. Nhận xét là ta xét $B_2, B_3, \ldots$, như là một chuỗi các thông tin mà trong đó B_{k-1} là thông tin biết trước thông tin B_k. Khi $k = 2$, điều này cho ta các điều kiện cần cụ thể về φ, và đây chính là cách mà các tác giả trong [13] đã nhận được các điều kiện cần.

Trong trường hợp mà $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) < n$, một vài đại lượng của $\mathfrak{X}_k$ không có sự tham gia của B_k, ví dụ, $\varphi_n^{(k+d_n-1)}(0)$. Vì thế việc xét các đạo hàm tiếp theo là tự nhiên, ví dụ, $\varphi_n^{(k+d_n)}(0)$ cho tới khi nó phụ thuộc vào B_k nhưng không phải phụ thuộc vào B_{k+1}. Bằng cách này, chúng tôi thực tế đã thay L_{B_0,B_1} bởi một ánh xạ mới L_{B_0,B_1,B_2} mà B_2 tham gia vào trong định nghĩa của L_{B_0,B_1,B_2} nhưng không có B_k nào khác với $k \geq 3$. Ánh xạ mới L_{B_0,B_1,B_2} này phải có hạng cực đại.

Tuy nhiên, ta vẫn còn vấn đề về sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\zeta^k$. Điều này hóa ra cũng không quá khó khăn: nếu ta có thể tìm được một nghiệm$\{B_k\}$ có dạng B_k là các ma trận chỉ gồm đúng một dòng khác 0, thì sự hội tụ được đảm bảo, do dãy B_k sẽ bị chi phối bởi một quan hệ hồi quy tuyến tính và ta có thể đánh giá được chuẩn của chúng.

Để làm điều này, chúng tôi phải tìm một ma trận B_2 thích hợp sao cho hạn chế của L_{B_0,B_1,B_2} lên không gian con của $\mathbb{C}^{n,n}$, gồm các ma trận có đúng dòng cuối khác 0, có hạng cực đại, tức là có hạng bằng n.

Chứng minh khi đó chủ yếu là kỹ thuật tính toán, rất dài dòng và mệt mỏi. Cũng do vấn đề hội tụ của chuỗi Taylor $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\zeta^k$ của $\Phi(\zeta)$ mà chúng tôi chỉ có thể giải quyết ở trường hợp $n = 4$, do tính toán sẽ trở nên rất cồng kềnh ở chiều lớn hơn.

Toàn bộ nội dung chương 3 được viết thành thành tiền ấn phẩm [21], tạm thời chưa được công bố ở tạp chí nào.

Chương 1

Về sự không tồn tại các đường cong $E-$Brody giới hạn

Trong chương này, chúng tôi trình bày một chứng minh mới cho kết quả của các tác giả Đỗ Đức Thái, Mai Anh Đức và Ninh Văn Thu [7] về các đường cong Brody giới hạn và họ không chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh hình. Chứng minh này được công bố ở bài báo [22], và do giới hạn về thời gian, chúng tôi tái xuất bản nội dung bài báo ở đây mà không có thêm thay đổi nào.

1.1 Dẫn nhập

Các họ không chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh hình và đường Brody (tức là một đường cong chỉnh hình có đạo hàm bị chặn) có mối quan hệ mật thiết (tham khảo [5, 25]). Liên quan tới các chủ đề này, các tác giả của bài báo [7] đã chứng minh được các kết quả sau.

Định lý 1.1 (Định lý 1.6 của [7])**.** $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ *không thuộc loại E-giới hạn với mọi hàm độ dài E trên $\mathbb{C}^n$.*

Định lý 1.2 (Định lý 1.7 của [7])**.** $(\mathbb{C}^*)^2$ *không thuộc loại ds^2_{FS}-giới hạn, trong đó ds^2_{FS} là metric Fubini-Study trên $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.*

Chứng minh của các tác giả này sử dụng một kết quả của J. Winkelmann và các kỹ thuật trích dãy khá phức tạp. Vì thế trong chương này, chúng tôi cố gắng đưa ra một chứng minh khác ngắn hơn và tổng quát hơn một chút.

Đầu tiên, chúng tôi nhắc lại một vài định nghĩa và giải thích nội dung các định lý của ba tác giả.

Định nghĩa 1.3. Cho X là một đa tạp phức được trang bị một metric Hermit E. Đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{C} \to X$ được gọi là một **đường cong**

E-Brody nếu đạo hàm của nó bị chặn, tức là $|f'(z)|_E \leq c$ với mọi $z \in \mathbb{C}$ trong đó c là một hằng số dương.

Hàm độ dài là khái niệm tổng quát hơn khái niệm metric, nhưng nó sẽ không liên quan gì tới chúng ta ở đây, ta có thể tham khảo bài báo của ba tác giả [7] cho định nghĩa đó. Lưu ý rằng nếu chúng tôi viết $E_p(\vec{v})$, thì điều đó có nghĩa là độ dài của vector tiếp xúc $\vec{v}$ tại điểm p theo metric E. Nếu điểm p đã rõ ràng, thì ta sẽ viết $|\vec{v}|_E$.

Định nghĩa 1.4. Cho X là một đa tạp phức được trang bị một metric Hermit E. Da tạp phức X được gọi là thuộc **loại E-giới hạn** nếu X thỏa mãn các điều sau:

Với mỗi họ không chuẩn tắc $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\Delta, X)$, trong đó Δ là một miền trong $\mathbb{C}$ và $\mathrm{Hol}(\Delta, X)$ là tập tất cả các ánh xạ chỉnh hình từ Δ vào X, sao cho $\mathcal{F}$ không chứa các dãy phân kỳ compact, tồn tại các dãy $\{p_j\} \subset \Delta$ với $p_j \to p_0 \in \Delta$ khi $j \to \infty$, $\{f_j\} \subset \mathcal{F}, \{\rho_j\} \subset \mathbb{R}$ với $\rho_j > 0$ và $\rho_j \to 0^+$ khi $j \to \infty$ sao cho

$$g_j(\xi) := f_j(p_j + \rho_j \xi), \xi \in \mathbb{C},$$

hội tụ đều trên các tập compact của $\mathbb{C}$ tới một đường cong E-Brody khác hằng $g : \mathbb{C} \to X$.

Để cho tiện, chúng tôi nhắc lại định nghĩa họ chuẩn tắc và tính phân kỳ compact, các định nghĩa này có thể tìm thấy ở trong các bài báo [8] hoặc [7].

Định nghĩa 1.5. Họ $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\Delta, X)$ được gọi là **chuẩn tắc** nếu, với mỗi dãy $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ trong $\mathcal{F}$, đều tồn tại một dãy con hội tụ đều trên các tập con compact của Δ. Họ ánh xạ mà không có tính chất này thì được gọi là họ **không chuẩn tắc**.

Định nghĩa 1.6. Dãy $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ trong $\mathrm{Hol}(\Delta, X)$ được gọi là **phân kỳ compact** nếu, với mọi tập con compact $K \subset \Delta$ và $L \subset X$, đều tồn tại j_0 sao cho, với mọi $j \geq j_0$, ta có $f_j(K) \cap L = \emptyset$.

1.2 Sự không tồn tại các đường cong Brody giới hạn

Bây giờ, chúng ta trình bày nội dung chính của chương. Chúng tôi sẽ chứng minh một kết quả tổng quát hơn một chút định lý 1.2 của ba tác giả (cụ thể là định lý 1.7 trong bài báo gốc của họ[7]). Nội dung của kết quả được trình bày sau đây.

Định lý 1.7 (Kết quả chính)**.** *Cho X là đa tạp phức có chứa một đường cong nguyên, tức là một đường cong chỉnh hình khác hằng $f\colon \mathbb{C} \to X$. Khi đó, cả hai đa tạp phức $\mathbb{C} \times X$ và $\mathbb{C}^* \times X$ đều không thuộc loại $E-$giới hạn với mọi metric Hermit E tương ứng trên $\mathbb{C} \times X$ và $\mathbb{C}^* \times X$.*

Để chứng minh định lý, ta sẽ sử dụng hai bổ đề. Bổ đề thứ nhất được phát biểu mà không chứng minh (tham khảo trang 299, chương 15 [17]).

Bổ đề 1.8. *Cho $c_n > 0$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó các điều sau là tương đương.*
(a) $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + c_n) < \infty$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$.
Thêm nữa, (a) và (b) đều tương đương với điều sau.
(c) $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - c_n) > 0$ nếu ta giả sử thêm rằng $0 < c_n < 1$ với mọi n.

Bổ đề thứ hai là bổ đề chính, là chìa khóa cho chứng minh của kết quả chính.

Bổ đề 1.9. *Cho $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ là một dãy các số phức khác không đôi một phân biệt thỏa mãn $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_j|} < \infty$. Khi đó, với mọi số phức p_j và k_j với $1 \leq j \in \mathbb{N}$, tồn tại một hàm chỉnh hình $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ thỏa mãn điều kiện nội suy sau: $g(\alpha_j) = p_j$ và $g'(\alpha_j) = k_j$ với mọi $1 \leq j \in \mathbb{N}$.*

Chứng minh. Bằng cách sử dụng Bổ đề 1.8, điều kiện $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_j|} < \infty$ kéo theo chuỗi tích $\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_j}\right)^2$ hội tụ tới một hàm nguyên khác hằng h mà tất cả các không điểm của nó là α_j và tại các không điểm này, h có đạo hàm bằng 0.

Ký hiệu $\mathcal{O}$ là bó các hàm chỉnh hình trên $\mathbb{C}$ và $\mathcal{I}$ là bó các hàm chỉnh hình trên $\mathbb{C}$ nhận α_j là không điểm có bậc lớn hơn 1. Khi đó ta có $\mathcal{I} = h \cdot \mathcal{O}$, và do đó $\mathcal{I}$ là một bó nhất quán (tham khảo trang 130, Mệnh đề 8, chương IV[11]).

Bây giờ ta sử dụng một kỹ thuật cổ điển như trong chứng minh định lý Mittag-Leffler. Xung quanh mỗi điểm α_j, ta luôn tìm thấy một hàm chỉnh hìnhf_j sao cho $f_j(\alpha_j) = p_j$ và $f_j'(\alpha_j) = k_j$. Điều đó có nghĩa là ta luôn tìm thấy một đối dây chuyền $\{(U_j, f_j)\}$, trong đó U_j là một lân cận mở của α_j với $j \geq 1$, trong phức đối dây chuyền Čech $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, trong đó $\mathcal{U} = \{U_j \ : \ j \geq 1\}$ là một phủ mở của $\mathbb{C}$ và $f_j(\alpha_j) = p_j$, $f_j'(p_j) = k_j$ với mọi $j \geq 1$.

Ký hiệu δ là toán tử vi phân của phức Čech. Khi đó, $\delta\{(U_j, f_j)\}$ là một đối chu trình trong $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{I})$ sai khác một cái mịn của $\mathcal{U}$. Nhưng bó $\mathcal{I}$ là nhất quán và không gian cơ sở $\mathbb{C}$ là không gian Stein, do đó đối đồng điều của nó $H^1(\mathbb{C}, \mathcal{I})$ triệt tiêu.

Điều đó có nghĩa là ta có thể tìm thấy một đối dây chuyền $\{(U_j, g_j)\} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{I})$ sao cho $\delta\{(U_j, f_j)\} = \delta\{(U_j, g_j)\}$. Suy ra $f_j - g_j = f_i - g_i$ trong

$U_j \cap U_i$ với $j \neq i$, khi đó chúng định nghĩa một hàm toàn cục $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ thỏa mãn các điều kiện nội suy trên. $\square$

Chứng minh của Định lý 1.7. Ta chỉ chứng minh định lý cho $\mathbb{C}^* \times X$, chứng minh cho trường hợp còn lại là tương tự.

Do f là chỉnh hình và khác hằng nên tồn tại một dãy các số phức khác không $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ trong $\mathbb{C}$ sao cho $f'(p_j) \neq 0$ với mọi j.

Giả sử $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ là một hàm chỉnh hình sao cho $g(\alpha_j) = p_j$ và $g'(\alpha_j) = k_j$ với mọi $j \geq 1$. Hàm này luôn tồn tại nhờ Bổ đề 1.9. Ta tính độ dài của vector tiếp xúc tới đường cong $\mathbb{C} \ni z \mapsto (e^z, (f \circ g)(e^z))$ tại điểm $z = q_j$ trong đó $e^{q_j} = \alpha_j$.

Ta có

$$\begin{aligned} E_{(\alpha_j, f(p_j))}(\alpha_j, f'(p_j)g'(\alpha_j)\alpha_j) &= E_{(\alpha_j, f(p_j))}(\alpha_j, f'(p_j)k_j\alpha_j) \\ &\geq |k_j| E_{(\alpha_j, f(p_j))}(0, f'(p_j)\alpha_j) - E_{(\alpha_j, f(p_j))}(\alpha_j, 0). \end{aligned}$$

Do đó nếu ta chọn

$$k_j = j \cdot \left(\frac{1}{E_{(\alpha_j, f(p_j))}(0, f'(p_j)\alpha_j)} + E_{(\alpha_j, f(p_j))}(\alpha_j, 0) \right),$$

thì đường cong nguyên $\mathbb{C} \ni z \mapsto (e^z, (f \circ g)(e^z))$, từ bây giờ được ký hiệu là F, không phải là một đường cong $E-$Brody.

Bây giờ xét dãy $f_n \in \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{C}^* \times X)$ định nghĩa bởi công thức $f_n(z) = F(nz)$. Dãy này không chứa dãy con nào phân kỳ compact do $f_n(0) = F(0)$ với mọi n. Do đó nếu $\mathbb{C}^* \times X$ thuộc loại $E-$giới hạn, thì ta có thể trích một dãy con, vẫn ký hiệu là f_j, sao cho tồn tại các điểm $a_j \to a_0 \in \Delta$ và $\rho_j > 0$ tiến tới 0 có tính chất sau:

Dãy các ánh xạ

$$\mathbb{C} \ni \xi \mapsto f_j(a_j + \rho_j \xi)$$

hội tụ đều trên các tập con compact tới một đường cong nguyên khác hằng được ký hiệu bởi G.

Tọa độ thứ nhất của ánh xạ $\mathbb{C} \ni \xi \mapsto f_j(a_j + \rho_j \xi)$ là $e^{ja_j + j\rho_j \xi}$, đây là một hàm chỉnh hình không có không điểm. Ký hiệu L là hàm giới hạn của dãy này, khi đó $G = (L, (f \circ g)(L))$. Ta suy ra L là khác hằng do G khác hằng. Theo định lý Hurwitz, L không có không điểm.

Ta có

$$j\rho_j = \frac{\frac{d}{d\xi} e^{ja_j + j\rho_j \xi}}{e^{ja_j + j\rho_j \xi}},$$

với tư cách là một dãy các hàm, hội tụ đều trên các tập con compact tới một hàm chỉnh hình chỉ nhận các giá trị thực. Do đó $j\rho_j$ hội tụ tới một số khác không B. Ta cũng có e^{ja_j} hội tụ tới một số khác không e^A.

Do đó L có dạng $L(\xi) = \exp(A + B\xi)$ và nó kéo theo

$$G(\xi) = (\exp(A + B\xi), (f \circ g)(\exp(A + B\xi))) = F(A + B\xi).$$

Theo cách xây dựng F, điều này cho ta một mâu thuẫn với giả sử $\mathbb{C}^* \times X$ thuộc loại E-giới hạn. $\square$

Chương 2

Bài toán nâng ánh xạ từ đa đĩa đối xứng hóa không có điều kiện đạo hàm

Nội dung của chương này là bản dịch nguyên văn bài báo của chúng tôi được công bố tại [15] và do hạn chế về thời gian, chúng tôi không thêm bất cứ thay đổi nào.

2.1 Tóm tắt nội dung

Quả cầu phổ đơn vị Ω_n là tập tất cả các ma trận vuông M cấp n có bán kính phổ nhỏ hơn 1. Để cho gọn, ta sẽ nói quả cầu phổ, thay cho quả cầu phổ đơn vị. Ký hiệu $\pi(M) \in \mathbb{C}^n$ là các hệ số của đa thức đặc trưng của ma trận M, tức là các đa thức đối xứng sơ cấp của các giá trị riêng của nó. Khi đó đa đĩa đối xứng hóa chiều n được định nghĩa là $\mathbb{G}_n := \pi(\Omega_n)$.

Thông thường khi khảo sát các bài toán Nevanlinna-Pick cho các ánh xạ từ đĩa vào quả cầu phổ, việc chiếu ánh xạ lên đa đĩa đối xứng hóa sẽ có lợi ích nhất định (ví dụ để nhận được các kết quả về tính liên tục của hàm Lempert): nếu $\Phi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \Omega_n)$, khi đó $\pi \circ \Phi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{G}_n)$. Cho ánh xạ $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{G}_n)$, chúng ta tìm điều kiện cần và đủ để ánh xạ này có thể nâng được qua các ma trận cho trước, tức là tìm Φ như trên sao cho $\pi \circ \Phi = \varphi$ và $\Phi(\alpha_j) = A_j$, $1 \leq j \leq N$. Một điều kiện cần tự nhiên là $\varphi(\alpha_j) = \pi(A_j)$, $1 \leq j \leq N$. Khi các ma trận A_j là vi phạm (tiếng Anh: derogatory; nghĩa là không thừa nhận một vector cyclic) các điều kiện cần mới sẽ xuất hiện, bao gồm các đạo hàm của φ tại các điểm α_j. Chúng tôi chứng minh rằng các điều kiện đó là cần và đủ để nâng địa phương. Chúng tôi đưa ra công thức để thực hiện nâng toàn cục đối với các chiều nhỏ ($n \leq 5$), và một phản ví

dụ cho thấy công thức thất bại ở chiều từ 6 trở lên.

2.2 Các động cơ nghiên cứu và các phát biểu

2.2.1 Các định nghĩa

Một vài bài toán trong Lý thuyết điều khiển mạnh dẫn tới việc nghiên cứu các giá trị kỳ dị có cấu trúc của một ma trận (được ký hiệu bởi μ). Một trường hợp đặc biệt của chuyện này chính là bán kính phổ của ma trận. Một ví dụ rất đặc biệt của bài toán "μ-tổng hợp" được quy về bài toán Nevanlinna-Pick, tức là cho trước các điểm $\alpha_j \in \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $A_j \in \Omega \subset \mathbb{C}^m$, $1 \leq j \leq N$, xác định xem tồn tại hay không hàm chỉnh hình Φ từ $\mathbb{D}$ vào Ω sao cho $\Phi(\alpha_j) = A_j$, $1 \leq j \leq N$. Ta có tham khảo những vấn đề này trong bài tổng quan rất thú vị của Nicholas Young [23].

Chúng tôi nghiên cứu trường hợp đặc biệt này. Bây giờ chúng tôi sẽ đưa ra một vài ký hiệu.

Cho $\mathcal{M}_n$ là tập hợp tất cả các ma trận vuông phức cấp n. Với $A \in \mathcal{M}_n$ ký hiệu $\mathrm{Sp}(A)$ và $r(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$ lần lượt là phổ và bán kính phổ của A.

Định nghĩa 2.1. *Quả cầu phổ* Ω_n được cho bởi

$$\Omega_n := \{A \in \mathcal{M}_n : r(A) < 1\}.$$

Đa đĩa đối xứng hóa $\mathbb{G}_n$ được định nghĩa bởi

$$\mathbb{G}_n := \{\pi(A) : A \in \Omega_n\},$$

trong đó ánh xạ $\pi : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $\pi = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, được cho bởi các hệ số của đa thức đặc trưng của ma trận (sai khác dấu):

$$P_A(t) := \det(tI_n - A) =: \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma_j(A) t^{n-j}.$$

Hay nói cách khác, tọa độ thứ k của π, tức $\sigma_k(A)$, là đa thức đối xứng sơ cấp thứ k của các giá trị riêng của A.

Bài toán 2.2. *(Bài toán nâng).*

Cho ánh xạ $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{G}_n)$ và $A_1, \ldots, A_N \in \Omega_n$, tìm các điều kiện (cần, hoặc đủ) sao cho tồn tại hàm chỉnh hình $\Phi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \Omega_n)$ thỏa mãn $\varphi = \pi \circ \Phi$ và $\Phi(\alpha_j) = A_j$ với $j = 1, \ldots, N$.

Khi điều này xảy ra, ta nói rằng ánh xạ φ *nâng* qua các ma trận $A_1, \ldots, A_N$ tại các điểm $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$. Một điều kiện cần hiển nhiên để cho φ nâng qua các ma trận $A_1, \ldots, A_N$ tại $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ là $\varphi(\alpha_j) = \pi(A_j)$ với $j = 1, \ldots, N$.

Nhận xét 2.3. Bất cứ khi nào có một nghiệm cho bài toán nâng với dữ liệu α_j, A_j, thì khi đó sẽ có một nghiệm cho bài toán tương ứng với $\alpha_j, \tilde{A}_j$, trong đó $A_j \sim \tilde{A}_j$ với mỗi j, tức là A_j đồng dạng với $\tilde{A}_j$, tức là với mỗi j tồn tại $P_j \in \mathcal{M}_n^{-1}$ sao cho $\tilde{A}_j = P_j^{-1} A_j P_j$ [1, Chứng minh Định lý 2.1].

Kết quả đầu tiên của chúng tôi là một câu trả lời địa phương (Mệnh đề 2.11 ở Mục 2.4). Sử dụng điều này và lý thuyết Forstnerič, R. Andrist [2] gần đây đã chứng minh được rằng các điều kiện địa phương thực chất cũng là điều kiện đủ cho bài toán nâng toàn cục. Tuy nhiên, chúng tôi cung cấp một công thức cụ thể cho ánh xạ nâng với $n \leq 5$ (Định lý 2.20 ở Mục 2.6). Phương pháp được phát triển ở Mục 2.5 hoạt động trong một số trường hợp khác (ví dụ khi các ma trận nội suy có một giá trị riêng duy nhất), nhưng nói chung thất bại đối với các chiều từ 6 trở lên, như được chứng minh trong Mục 2.7.

2.2.2 Các động cơ nghiên cứu

Các ánh xạ nâng quy việc nghiên cứu bài toán nội suy Nevanlinna-Pick trong quả cầu phổ về một bài toán với miền đích bị chặn và có chiều nhỏ hơn nhiều. Đa đĩa đối xứng hóa là *căng* (tiếng Anh: taut), tức là mọi họ ánh xạ chỉnh hình vào nó đều là họ chuẩn tắc. Do đó, nói riêng nếu các điều kiện nâng là liên tục đối với φ (ví dụ phụ thuộc vào một số hữu hạn các giá trị của φ và các đạo hàm của nó), ta có thể thu thêm được các kết quả về tính liên tục. Để trình bày điều này, chúng tôi sử dụng ký hiệu sau.

Định nghĩa 2.4. Cho ánh xạ $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ và $\alpha \in \mathbb{D}$, *jet thứ* k (hoặc $k-$*jet* cho gọn) của φ tại α được định nghĩa là $\mathcal{J}_\alpha^k(\varphi) := \big(\varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \ldots, \varphi^{(k)}(\alpha)\big) \in \mathbb{C}^{(k+1)n}$.

Ánh xạ $\varphi \mapsto \mathcal{J}_\alpha^k(\varphi)$ là tuyến tính và liên tục từ $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$, được trạng bị topo hội tụ đều trên các tập compact, tới $\mathbb{C}^{(k+1)n}$.

Chúng tôi đưa ra một ví dụ kết quả về tính liên tục khi $N = 2$. Ta nhắc lại định nghĩa của hàm Lempert trong bối cảnh này.

Định nghĩa 2.5. Cho $A, B \in \Omega \subset \mathbb{C}^m$, *hàm Lempert* được định nghĩa là

$$\ell_\Omega(A, B) := \inf \left\{ |\alpha| : \exists \varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \Omega) : \varphi(\alpha) = A, \varphi(0) = B \right\}.$$

Định nghĩa 2.6. Ta nói ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ là *cyclic* nếu nó thừa nhận một vector cyclic v, tức là $v \in \mathbb{C}^n$ sao cho các lặp lại của nó $\{A^k x, k \geq 0\}$ sinh ra toàn bộ $\mathbb{C}^n$.

Kết quả sau được nhiều người biết: hàm Lempert liên tục theo cả hai đối số tại các điểm (A, B) trong đó A và B là cyclic. Tình huống trở nên không rõ ràng nữa khi mà một trong hai ma trận không còn là cyclic (những ma trận như thế được gọi là *vi phạm* (tiếng Anh: derogatory; ta cũng có thể dùng từ "phi-cyclic")).

Mệnh đề sau là ẩn trong [19, Mục 4].

Mệnh đề 2.7. *Cho $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$.*

Giả sử A là ma trận cyclic.

Giả sử tồn tại các số nguyên $k, p \geq 0$ và ánh xạ tuyến tính

$$\begin{array}{rcl} \Theta_B : \mathbb{C}^{(k+1)n} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \\ V = (V_0, \ldots, V_k) & \mapsto & \Big(V_0, \tilde{\Theta}_B(V)\Big) \end{array}$$

sao cho: ánh xạ $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ thừa nhận một ánh xạ nâng Φ qua (A, B) tại $(\alpha, 0)$, với $\Phi(\zeta)$ là cyclic đối với $\zeta \neq 0$, khi và chỉ khi $\varphi(\alpha) = \pi(A)$ và $\Theta_B(\mathcal{J}_0^k(\varphi)) = (\pi(B), 0)$.

Khi đó ánh xạ $M \mapsto \ell_{\Omega_n}(M, B)$ liên tục tại điểm A.

Trong ngôn từ ít kỹ thuật hơn, nếu A cyclic, và nếu B thỏa mãn rằng sự tồn tại ánh xạ nâng của φ từ đa đĩa đối xứng hóa qua (A, B), nhận giá trị cyclic trừ B, được đặc trưng hóa bởi một số hữu hạn các điều kiện lên các giá trị của φ và các đạo hàm của nó (tại một số điểm thích hợp của nó), khi đó ta có được tính liên tục bộ phận của hàm Lempert đối với đối số thứ nhất tại (A, B).

Do kết quả của R. Andrist [2] (và, trong một trường hợp đặc biệt, Định lý của chúng tôi 2.20) cung cấp một tập hợp các điều kiện như trong Mệnh đề 2.7, bây giờ chúng tôi biết rằng kết luận xảy ra với mọi ma trận $B \in \mathcal{M}_n$ và với mọi chiều n: nếu A cyclic, ánh xạ $M \mapsto \ell_{\Omega_n}(M, B)$ liên tục tại A.

Chứng minh của Mệnh đề 2.7.

Hàm Lempert luôn luôn nửa liên tục trên, vì thế chúng tôi chỉ cần chứng minh:

$$\text{khi } A_p \to A, \quad \ell_{\Omega_n}(A, B) \leq \limsup_p \ell_{\Omega_n}(A_p, B).$$

Chuyển qua một dãy nếu cần thiết, ta có thể chọn $\alpha_p \in \mathbb{D}$ sao cho $|\alpha_p| \geq \ell_{\Omega_n}(A_p, B)$ và $\lim_{p\to\infty} |\alpha_p| = |\alpha_\infty| = \limsup_{p\to\infty} \ell_{\Omega_n}(A_p, B)$, với $\alpha_\infty \in \overline{\mathbb{D}}$. Khi đó, tồn tại $\Phi_p \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \Omega_n)$ sao cho $\Phi_p(0) = B$, $\Phi_p(\alpha_p) = A_p$.

Cho $\varphi_p := \pi \circ \Phi_p$. Bởi vì $\mathbb{G}_n$ là miền căng, chuyển qua dãy con nếu cần thiết, ta có thể giả sử $\varphi_p \to \varphi_\infty \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{G}_n)$. Rõ ràng $\varphi_\infty(0) = \pi(B)$.

Do tính liên tục của ánh xạ jet, $(\pi(B), 0) = \Theta_B(\mathcal{J}_0^k(\varphi_p)) = \Theta_B(\mathcal{J}_0^k(\varphi_\infty))$, do đó tồn tại Φ_∞ sao cho $\pi \circ \Phi_\infty = \varphi_\infty$, $\Phi_\infty(0) = B$.

Hơn nữa, $\pi(\Phi_\infty(\alpha_\infty)) = \varphi_\infty(\alpha_\infty) = \lim_p \varphi_p(\alpha_p) = \lim_p \pi(A_p) = \pi(A)$, và do $\Phi_\infty(\alpha_\infty)$ và A có cùng phổ và cyclic, $\Phi_\infty(\alpha_\infty) \sim A$. $\square$

2.3 Những thu gọn đầu tiên của bài toán

Ta cần thiết lập một số ký hiệu.

Định nghĩa 2.8. Cho trước một vector $v := (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$, ta ký hiệu $P_{[v]}(t) := t^n + \sum_{j=1}^n (-1)^j v_j t^{n-j}$.

Cách chọn này đảm bảo $P_{[\pi(A)]} = P_A$.

Định nghĩa 2.9. Cho $a := (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, *ma trận đồng hành* của a là

$$C_{[a]} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Ta thấy rằng đa thức đặc trưng của nó khi đó là $\det(tI_n - C_{[a]}) = t^n - \sum_{j=1}^n a_j t^{n-j}$, để cho $\sigma_j(C_{[a]}) = (-1)^{j+1} a_j$, với $1 \le j \le n$.

Cho ma trận M, *ma trận đồng hành* của M, ký hiệu là C_M, là ma trận duy nhất ở dạng đồng hành có cùng đa thức đặc trưng với M.

Ma trận $A \in \mathcal{M}_n$ là cyclic (hay không vi phạm) khi và chỉ khi nó đồng dạng với ma trận đồng hành của nó (xem [14] cho chứng minh của tính chất này cũng như các tính chất tương đương khác).

Tính toán trên của đa thức đặc trưng của ma trận đồng hành cho thấy $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{G}_n)$, nếu ta viết $\tilde{\varphi} := ((-1)^{j+1}\varphi_j, 1 \le j \le n)$, thì ánh xạ được cho bởi $\Phi(\zeta) := C_{[\tilde{\varphi}(\zeta)]}$ là một nâng của φ.

Do đó, kết hợp với Nhận xét 2.3, điều này có nghĩa là việc nâng qua một tập hợp các ma trận cyclic có thể đạt được ngay khi các điều kiện cần hiển nhiên $\varphi(\alpha_j) = \pi(A_j)$, $1 \le j \le N$, được thỏa mãn [1, Định lý 2.1], [6, Định lý 2.1].

Trường hợp A_1 chỉ có đúng một giá trị riêng , và $A_2, \ldots, A_N$ cyclic, đã được nghiên cứu trong [19].

2.4 Các điều kiện cần

Cho $A_1 \in \mathcal{M}_n$. Sai khác đồng dạng, ta có thể giả sử nó có dạng Jordan. Ta viết nó dưới dạng khối liên kết với mỗi giá trị riêng *phân biệt* của A_1, ký hiệu

là $\lambda_k, 1 \le k \le s$ trong đó $s \le n$. Cụ thể là

$$A_1 = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_s \end{pmatrix}, \quad B_k \in \mathcal{M}_{m_k}, \quad \sum_{k=1}^{s} m_k = n, \tag{2.1}$$

trong đó Sp $B_k = \{\lambda_k\}$, và $\lambda_j \ne \lambda_k$ với $k \ne j$.

Tạm thời, ta cố định k và viết (B, λ, m) thay cho (B_k, λ_k, m_k). Ta cần thiết lập một vài ký hiệu như trong[19]. Cho $B = (b_{i,j})_{1 \le i,j \le m}$. Khi đó $b_{jj} = \lambda$, $b_{j-1,j} \in \{0, 1\}$, $2 \le j \le m$, và $b_{ij} = 0$ nếu hoặc $i > j$ hoặc $i + 1 < j$.

Ký hiệu r là hạng của $B - \lambda I_m$, tức là có đúng $m - r$ cột trong $B - \lambda I_m$ đồng nhất 0, cái thứ nhất, và những cái được đánh số bởi các số nguyên $j \ge 2$ sao cho $b_{j-1,j} = 0$. Đánh số tập hợp (có thể rỗng) các chỉ số cột mà hệ số $b_{j-1,j}$ triệt tiêu như sau

$$\{j : b_{j-1,j} = 0\} =: \{b_2, \ldots, b_{m-r}\}, 2 \le b_2 < \cdots < b_{m-r} \le m.$$

Một cách tương đương, $b_{l+1} - b_l$ là cỡ của khối Jordan $B^{(l)} := (b_{ij})_{b_l \le i,j \le b_{l+1}-1}$. Số nguyên $b_{l+1} - b_l$ là bậc lũy linh của khối $B^{(l)}$.

Ta có thể chọn dạng Jordan sao cho $b_{l+1} - b_l$ là dãy tăng theo $1 \le l \le m - r$, với quy ước $b_{m-r+1} := m + 1$. Tức là các số 0 có thể có xuất hiện với các chỉ số j nhỏ nhất có thể một cách toàn cục.

Định nghĩa 2.10. Với $1 \le i \le m$,

$$d_i(B) = d_i := 1 + \#\{k : m - i + 2 \le b_k \le m\}.$$

Một cách tương đương, $d_i - 1$ là số các cột đồng nhất 0, trong số $i - 1$ cột cuối của A_1 hay

$$d_i = 1 + (m - r) - \max\{j : b_j \le m - i + 1\},$$

với quy ước rằng số max bằng 0 nếu tập hợp bên phải là rỗng.

Ta cũng có thể diễn giải $d_j = d_j(B)$ như là số nguyên d nhỏ nhất sao cho có một tập S của d vector trong $\mathbb{C}^n$ với tính chất rằng các lặp lại của S bởi B sinh ra một không gian con của $\mathbb{C}^n$ với chiều không bé hơn j (ta sẽ không cần đặc trưng này, và vì thế chúng tôi không trình bày chứng minh).

Chú ý rằng B là cyclic khi và chỉ khi $d_i(B) = 1$, với mọi i ($b_{j-1,j} = 1$ với mọi j); trong khi đó nó là vô hướng khi và chỉ khi $d_i(B) = i$, với mọi i ($b_{j-1,j} = 0$ với mọi j).

Mệnh đề sau đưa ra một tập hợp các điều kiện nâng cần và đủ về mặt địa phương. Nói riêng, điều này nói rằng tất cả các điều kiện cần có thể có mà có thể nhận được từ biểu hiện của Φ trong một lân cận $\alpha \in \mathbb{D}$ đều được vét cạn bởi (2.2).

Mệnh đề 2.11. *Cho $\varphi \in Hol(\omega, \mathbb{G}_n)$, với ω là một lân cận của $\alpha \in \mathbb{D}$. Cho A_1 như trong (2.1). Các khẳng định sau là tương đương:*

(a) Tồn tại $\omega' \subset \mathbb{D}$ một lân cận của α và $\Phi \in \mathrm{Hol}(\omega', \Omega_n)$ sao cho

$$\pi \circ \Phi = \varphi, \Phi(0) = A_1;$$

(b) Ánh xạ φ thỏa mãn

$$\frac{d^k P_{[\varphi(\zeta)]}}{dt^k}(\lambda_j) = O((\zeta - \alpha)^{d_{m_j - k}(B_j)}), \quad 0 \le k \le m_j - 1, 1 \le j \le s, \quad (2.2)$$

trong đó d_i như trong Định nghĩa 2.10.

(c) Tồn tại $\omega' \subset \mathbb{D}$ một lân cận của α và $\Phi \in Hol(\omega', \Omega_n)$ sao cho

$$\pi \circ \Phi = \varphi, \Phi(0) = A_1 \text{ và } \Phi(\zeta) \text{ cyclic với } \zeta \in \omega' \setminus \{\alpha\}.$$

Chú ý rằng điều kiện

$$\frac{d^k P_{[\varphi(\zeta)]}}{dt^k}(\lambda_j) = O(\zeta - \alpha), \quad 0 \le k \le m_j - 1, 1 \le j \le s,$$

nói một cách chính xác rằng $P_{[\varphi(\alpha)]}(t) = P_{A_1}(t)$, hay nói cách khác, $\varphi(\alpha) = \pi(A_1)$, chính là các điều kiện cần hiển nhiên cho sự tồn tại ánh xạ nâng; và cũng là những điều kiện duy nhất cần thiết khi A_1 là cyclic, tức là ví dụ khi $d_{m_j - k}(B_j) = 1$ với mọi j và k.

Rõ ràng điều kiện (c) kéo theo điều kiện (a), do đó chúng ta chỉ cần chứng minh rằng (a) suy ra (b) (các điều kiện cần) và (b) kéo theo (c) (các điều kiện đủ).

Chứng minh. Đầu tiên do đây là một kết quả địa phương, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $\alpha = 0$.

Các điều kiện cần.

Đầu tiên, xét trường hợp chỉ có một giá trị riêng λ_1 for A_1, tức là $s = 1$, và hơn nữa $\lambda_1 = 0$. Điều này được thiết lập bởi [19, Corollary 4.3], mà ta có thể phát biểu lại như sau.

Bổ đề 2.12. *Nếu $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \pi \circ \Phi$ với $\Phi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \Omega_n)$, $\Phi(0) = A_1$ như trong (2.1), $\mathrm{Sp}\, A_1 = \{0\}$ khi đó $\varphi_i(\zeta) = O(\zeta^{d_i})$, trong đó d_i như trong Định nghĩa 2.10.*

Chú ý rằng nếu ta viết $P^{(k)}_{[\varphi(\zeta)]} := \frac{d^k P_{[\varphi(\zeta)]}(t)}{dt^k}$ (đạo hàm của đa thức đối với biến t, không nhầm lẫn với đạo hàm đối theo biến chỉnh hình ζ), các điều kiện trên có thể viết thành $P^{(k)}_{[\varphi(\zeta)]}(0) = O(\zeta^{d_{n-k}})$, $0 \le k \le n-1$.

Nếu $\operatorname{Sp} A_1 = \{\lambda\}$, then $\operatorname{Sp}(A_1 - \lambda I_n) = \{0\}$. Ta thấy ngay rằng $P_{A_1-\lambda I_n}(t) = P_{A_1}(t-\lambda)$, do đó điều kiện cần trong trường hợp tổng quát hơn của ma trận với một giá trị riêng duy nhất trở thành:

Bổ đề 2.13. *Nếu $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \pi \circ \Phi$ với $\Phi \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D}, \Omega_n)$, $\Phi(0) = A_1$, $\operatorname{Sp} A_1 = \{\lambda\}$ khi đó $P^{(k)}_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda) = O(\zeta^{d_{n-k}})$, $0 \le k \le n-1$.*

Bây giờ xét trường hợp tổng quát. Để chứng minh (2.2) cho mỗi j, không mất tính tổng quát, ta nghiên cứu khối B_1 liên kết với giá trị λ_1.

[20, Bổ đề 3.1] và các nhận xét sau đó cho ta một nhân tử hóa chỉnh hình trong một lân cận ω nào đó của 0 của đa thức đặc trưng của $\Phi(\zeta)$: for $\zeta \in \omega$, $P_{[\varphi(\zeta)]}(X) = P^1_\zeta(X) P^2_\zeta(X)$, và một phân tích tương ứng của không gian $\mathbb{C}^n$ thành tổng trực tiếp biến thiên của các không gian con có chiều m_1 và $n - m_1 = m_2 + \dots + m_s$, với các ánh xạ $\Phi_1 \in \operatorname{Hol}(\omega, \Omega_{m_1})$, $\Phi_2 \in \operatorname{Hol}(\omega, \Omega_{m_2+\dots+m_s})$, sao cho $P^i_\zeta(t)$ là đa thức đặc trưng của $\Phi_i(\zeta)$, $i = 1, 2$; $P^1_0(t) = P_{B_1}(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}$; và
$P^2_0(t) = (t-\lambda_2)^{m_2} \cdots (t-\lambda_s)^{m_s}$.

Cũng như trước, ta có thể xét $P_{[\varphi(\zeta)]}(t-\lambda_1)$ để quy về trường hợp $\lambda_1 = 0$. Chứng minh của tính cần của (2.2) kết thúc với bổ đề sau (áp dụng cho $k_j := m_1 - d_j(B_1)$).

Bổ đề 2.14. *Cho $P^0_\zeta, P^1_\zeta, P^2_\zeta$ là các đa thức phụ thuộc chỉnh hình vào ζ, $P^i_\zeta(t) = \sum_{j=0}^{m_i} a^i_j t^j$, $i = 0, 1, 2$, thỏa mãn $P^0_\zeta(t) = P^1_\zeta(t) P^2_\zeta(t)$, $P^1_0(t) = t^{m_1}$ và $a^2_0(0) = P^2_0(0) \neq 0$.*

Cho $(k_j, 0 \le j \le m_1 - 1)$ là một dãy giảm các số nguyên dương. Khi đó $a^0_j = O(\zeta^{k_j}), 0 \le j \le m_1 - 1$ khi và chỉ khi $a^1_j = O(\zeta^{k_j}), 0 \le j \le m_1 - 1$.

Chứng minh. Do P^0 là tích của hai đa thức khác, $a^0_j = \sum_{l=0}^{j} a^1_{j-l} a^2_l$. Do (k_j) giảm, nên giả thiết $a^1_{j-l} = O(\zeta^{k_{j-l}})$ kéo theo $a^1_{j-l} = O(\zeta^{k_j})$, do đó $a^0_j = O(\zeta^{k_j})$.

Ngược lại, bằng quy nạp theo j. Với $j = 0$, $a^1_0 = a^0_0 / a^2_0 = O(\zeta^{k_0})$ do mẫu thức không triệt tiêu tại $\zeta = 0$. Giả sử tính chất được thỏa mãn với $0 \le j' \le j-1$. Ta có $a^1_j = \frac{1}{a^2_0}\left(a^0_j - \sum_{l=1}^{j} a^1_{j-l} a^2_l\right)$, do đó theo giả thiết quy nạp thì $a^1_{j-l} = O(\zeta^{k_{j-l}}) = O(\zeta^{k_j})$ bởi vì (k_j) giảm, và do $a^0_j = O(\zeta^{k_j})$, chúng ta kết thúc công việc. □

Các điều kiện đủ.

Sử dụng [20, Bổ đề 3.1] và các nhận xét sau đó, áp dụng lặp lại, ta tìm thấy lân cận ω nào đó của 0, và một nhân tử hóa biến thiên chỉnh hình thành

các nhân tử nguyên tố cùng nhau $P_{[\varphi(\zeta)]}(t) = P_{[\varphi_1(\zeta)]}(t) \cdots P_{[\varphi_s(\zeta)]}(t)$, và một phân tích của không gian $\mathbb{C}^n$,

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{s} \ker P_{[\varphi_j(\zeta)]}(\Phi(\zeta)).$$

Thu gọn ω nếu cần thiết, với mỗi i, $\varphi_i \in \mathrm{Hol}(\omega, \mathbb{G}_{m_i})$. Theo Bổ đề 2.14, các điều kiện cần về triệt tiêu liên quan tới ma trận $B_i \in \mathcal{M}_{m_i}$ được thỏa mãn, với Sp $B_i = \{\lambda_i\}$. Do đó từ Bổ đề 2.13, tồn tại $\Phi_i \in \mathrm{Hol}(\omega, \Omega_{m_i})$ sao cho $\varphi_i = \pi \circ \Phi_i$. "Ánh xạ khối"

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Phi_s \end{pmatrix}$$

cung cấp ánh xạ nâng mong muốn. □

2.5 Một công thức cho ánh xạ nâng

2.5.1 Dạng Jordan sửa đổi

Đầu tiên ta cần một bổ đề đại số tuyến tính cho ta dạng chính tắc của các ma trận, khác một chút so với dạng Jordan để thích hợp với mục đích của chúng ta. Chúng tôi gọi nó là *dạng Jordan sửa đổi.*

Chúng tôi cần thiết lập các ký hiệu sửa đổi một chút. Cho $A_1 \in \mathcal{M}_n$ có $Sp(A_1) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$: ở đây các giá trị riêng tính lặp lại theo bội. Cho $m_1, \ldots, m_s$ là các bội tương ứng, đặt $n_j = m_1 + \cdots + m_j$. Khi đó $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_s = n$ và $\lambda_k = \lambda_{k'}$ khi và chỉ khi tồn tại $i \in \{1, \ldots, s\}$ sao cho $n_{i-1} < k, k' \leq n_i$.

Ta giả sử rằng $A_1 := (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ ở dạng Jordan với các ký hiệu của (2.1), trừ việc đánh chỉ số các giá trị riêng: bây giờ Sp $B_k = \{\lambda_{n_k}\}$.

Bổ đề 2.15. *Ma trận A_1 được cho như trên đồng dạng với $A' = (a'_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ trong đó $a'_{n_i,1+n_i} = 1 \neq a_{n_i,1+n_i} = 0$, $1 \leq i \leq s-1$, và $a'_{ij} = a_{ij}$ với mọi giá trị khác của các chỉ số.*

Chú ý rằng điều này có nghĩa là $a'_{ij} = 0$ if $j \notin \{i, i+1\}$, là $a'_{i,i+1} \in \{0, 1\}$ và nếu $a'_{i,i+1} = 0$, thì $a'_{ii} = a'_{i+1,i+1} \in Sp(A_1)$.

Một cách trực giác, tại chỗ nối giữa hai khối liên tiếp B_k, chúng tôi thay đổi hệ số ngay phía trên đường chéo (và nằm ngoài các khối) từ 0 thành 1.

Cơ sở mới mà chúng ta sẽ tìm thấy sẽ không còn chẻ không gian thành các không gian con bất biến nữa, nhưng chúng ta vẫn nhận được dạng tam giác. Điều chúng ta thu được là A' cyclic khi và chỉ khi $a'_{i,i+1} = 1$ với mọi i, $1 \leq i \leq n-1$.

Chứng minh. Cho $\{e_j, 1 \leq j \leq n\}$ là cơ sở có thứ tự mà dạng Jordan ban đầu được thiết lập. Ký hiệu $V_i := \mathrm{Span}\{e_j, n_{i-1} < j \leq n_i\}$ là các không gian riêng suy rộng đối với giá trị riêng λ_{n_i}, hay nói cách khác $V_i = \ker(\lambda_{n_i} I_n - A_1)^n$. Cuối cùng, cho u là ánh xạ tuyến tính liên kết với A_1.

Kết quả sẽ là hệ quả của tính chất sau, được chứng minh bằng quy nạp theo j, $1 \leq j \leq n$:

$$(P_j) : \exists v_j \in \bigoplus_{i:n_i<j} V_i \text{ sao cho nếu } e'_j := e_j + v_j, \text{ thì } u(e'_j) = \lambda_j e'_j + a'_{j-1,j} e'_{j-1},$$

với $a'_{j-1,j}$ được định nghĩa trong phần phát biểu của Bổ đề. (Ta hiểu ở đây là $e'_0 = 0$ và tổng rỗng các không gian con là $\{0\}$).

Ma trận A' sẽ là ma trận của u trong cơ sở $(v_1, \ldots, v_n)$.

Chúng ta chứng minh (P_j) bằng quy nạp. (P_1) đương nhiên thỏa mãn với $v_1 = 0$.

Bây giờ giả sử rằng $j \geq 2$, và rằng $(P_{j'})$ xảy ra với $j' < j$. Chúng ta tìm v sao cho

$$u(e_j + v) = \lambda_j(e_j + v) + a'_{j-1,j}(e_{j-1} + v_{j-1}),$$

hay một cách tương đương, do $(u - \lambda_j)\, e_j = a_{j-1,j} e_{j-1}$,

$$(u - \lambda_j)\,(v) = a'_{j-1,j} v_{j-1} + (a'_{j-1,j} - a_{j-1,j}) e_{j-1}. \tag{2.3}$$

Trường hợp 1. Tồn tại i sao cho $j = n_i + 1$.

Khi đó $a_{j-1,j} = 0$ và $a'_{j-1,j} = 1$, do đó (2.3) trở thành $\left(u - \lambda_{n_{i+1}}\right)(v) = v_{n_i} + e_{n_i}$. Vector cuối này nằm trong $W_i := \bigoplus_{i' \leq i} V_{i'}$, không gian này ổn định đối với ánh xạ tuyến tính $u - \lambda_{n_{i+1}}$. Thêm nữa, ánh xạ $(u - \lambda_{n_{i+1}})|_{W_i}$ không nhận 0 làm giá trị riêng, do đó phương trình thừa nhận một nghiệm duy nhất $v =: v_{j+1}$ trong W_i, chính là không gian mong muốn do$n_i < j$, đpcm.

Trường hợp 2. Với mọi i, $j - 1 \neq n_i$.

Khi đó $a'_{j-1,j} = a_{j-1,j}$, so (2.3) trở thành $(u - \lambda_j)\,(v) = a'_{j-1,j} v_{j-1}$, và $\bigoplus_{i:n_i<j-1} V_i = \bigoplus_{i:n_i<j} V_i$. Một lần nữa, không gian con đó ổn định đối với $u - \lambda_j$, hạn chế của ánh xạ là một song ánh, do đó chúng ta nhận được một nghiệm duy nhất $v =: v_{j+1} \in \bigoplus_{i:n_i<j} V_i$. □

Từ bây giờ, sử dụng Nhận xét 2.3, ta giả sử rằng các ma trận $A_1, \ldots, A_N$ mà chúng ta muốn nâng qua đang ở dạng Jordan sửa đổi, như được định nghĩa trong Bổ đề 2.15.

2.5.2 Sai phân chia

Định nghĩa 2.16. Cho đa thức P, các *sai phân chia* được cho lặp đi lặp lại như sau:

$$\Delta^0 P = P, \Delta^1 P(x_1, x_2) = \frac{P(x_1) - P(x_2)}{x_1 - x_2}, \ldots,$$
$$\Delta^m P(x_1, \ldots, x_{m+1}) = \frac{\Delta^{m-1} P(x_1, \ldots, x_m) - \Delta^{m-1} P(x_2, \ldots, x_{m+1})}{x_1 - x_{m+1}}.$$

Nhắc lại là $\Delta^m P(x, \ldots, x) = \frac{1}{m!} P^{(m)}(x)$. Một tài liệu tham khảo tốt về sai phân chia là [4].

2.5.3 Một ánh xạ nâng phân hình

Công thức sau đưa ra một nghiệm "phân hình" cho bài toán nâng: tức là một số các hệ số của ma trận được cho bởi các thương và có thể có cực. Đương nhiên, khi các kỳ dị có thể bỏ được, ta mở rộng các hàm số theo cách thông thường và các tính chất được khẳng định bên dưới được mở rộng bằng tính liên tục.

Mệnh đề 2.17. *Cho Φ là ánh xạ từ $\mathbb{D}$ (trừ một số kỳ dị) vào $\mathcal{M}_n$ được định nghĩa bởi*

$$\Phi(\zeta) := \begin{pmatrix} \varphi_{1,1}(\zeta) & f_2(\zeta) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_{2,2}(\zeta) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & f_{n-1}(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_{n-1,n-1}(\zeta) & f_n(\zeta) \\ \varphi_{n,1} & \varphi_{n,2} & \cdots & \varphi_{n,n-1} & \varphi_{n,n} \end{pmatrix},$$

trong đó f_k, $2 \le k \le n$, và $\varphi_{k,k}$, $1 \le k \le n-1$, là các hàm chỉnh hình được chọn, f_k không đồng nhất 0, và trong đó

$$\varphi_{n,\ell} := -\frac{\Delta^{\ell-1} P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \ldots \varphi_{\ell,\ell})}{\prod_{k=\ell+1}^{n} f_k(\zeta)}, \quad 1 \le \ell \le n-1, \tag{2.4}$$

và cuối cùng

$$\varphi_{n,n} := -\Delta^{n-1} P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \ldots, \varphi_{n-1,n-1}, 0) = \varphi_1 - (\varphi_{1,1} + \cdots + \varphi_{n-1,n-1}).$$

Khi đó $\pi \circ \Phi(\zeta) = \varphi(\zeta)$, với các giá trị của ζ mà tại đó các thương có nghĩa.

Cho A' như trong kết luận của Bổ đề 2.15, và $\alpha \in \mathbb{D}$. Nếu $f_k(\alpha) = a'_{k-1,k}$, $2 \le k \le n$, $\varphi_{kk}(\alpha) = \lambda_k$, $1 \le k \le n$, và $\varphi_{n,k}(\alpha) = 0$, $1 \le k \le n-1$, thì $\Phi(\alpha) = A'$.

Nếu $f_k(\zeta) \neq 0$ với mọi $k \in \{2, \dots, n\}$ và $\zeta \in \mathbb{D} \setminus \{\alpha\}$, thì $\Phi(\zeta)$ cyclic với $\zeta \in \mathbb{D} \setminus \{\alpha\}$.

Lưu ý là chúng tôi thi thoảng bỏ qua đối số ζ trong $\varphi_{ij}(\zeta)$ và các hàm khác. Điều này sẽ tiếp tục xảy ra.

Chứng minh. Phát biểu cuối được thỏa mãn ngay lập tức.

Để thấy rằng $\pi \circ \Phi(\zeta) = \varphi(\zeta)$, ta tính $\det(tI_n - \Phi(\zeta))$ bằng cách khai triển theo hàng cuối:

$$\begin{aligned}
&= (t - \varphi_{n,n}) \prod_{i=1}^{n-1} (t - \varphi_{i,i}) - \sum_{\ell=1}^{n-1} (-1)^{n+\ell} \varphi_{n,\ell} \prod_{i=1}^{\ell-1} (t - \varphi_{i,i}) \prod_{i=\ell+1}^{n} (-f_i) \\
&= t \prod_{i=1}^{n-1} (t - \varphi_{i,i}) + \Delta^{n-1} P_{[\varphi]}(\varphi_{1,1}, \dots, \varphi_{n-1,n-1}, 0) \prod_{i=1}^{n-1} (t - \varphi_{i,i}) \\
&\qquad + \sum_{j=0}^{n-2} \Delta^j P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \dots \varphi_{j+1,j+1}) \prod_{i=1}^{j} (t - \varphi_{ii}) \\
&= P_{[\varphi(\zeta)]}(t),
\end{aligned}$$

theo công thức Newton áp dụng cho n điểm $(\varphi_{1,1}, \dots, \varphi_{n-1,n-1}, 0)$. □

2.5.4 Các tính toán cơ bản

Bổ đề 2.18. *Cho các số tự nhiên $k \le j$, sai phân chia $\Delta^k t^j$ được cho bởi công thức*

$$\Delta^k t^j(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{k+1} \ge 0 \\ i_1 + \dots + i_{k+1} = j-k}} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_{k+1}^{i_{k+1}}.$$

Bổ đề 2.19. *Cho A_1 như trong (2.1). Cho $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{G}_n)$ thỏa mãn các điều kiện (2.2) tại $\alpha = 0$.*

(a) Cho $\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}, \dots, \varphi_{m_1,m_1} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ trong đó $\varphi_{i,i}(0) = \lambda_1$ với $1 \le i \le m_1$. Khi đó

$$\Delta^k P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}, \dots, \varphi_{k+1,k+1}) = O(\zeta^{d_{m_1-k}(B_1)})$$

với $0 \le k \le m_1 - 1$.

(b) Cho $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Giả sử

$$\Delta^k P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}, \ldots, \varphi_{k+1,k+1}) = O(\zeta^d)$$

với $0 \leq k \leq m_1 - 1$ trong đó $d \geq d_{m_2}(B_2)$. Cho $\varphi_{m_1+1,m_1+1} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ là bất kỳ hàm chỉnh hình nào thỏa mãn $\varphi_{m_1+1,m_1+1}(0) = \lambda_2$, khi đó

$$\Delta^{m_1} P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}, \ldots, \varphi_{m_1+1,m_1+1}) = O(\zeta^{d_{m_2}(B_2)}).$$

Chứng minh. Để chứng minh (a), ta viết $P_{[\varphi(\zeta)]}$ bằng cách sử dụng công thức Taylor:

$$P_{[\varphi(\zeta)]}(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{P^{(j)}_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1)}{j!}(t - \lambda_1)^j.$$

Với $1 \leq i \leq m_1$, đặt $\varphi_{i,i} = \lambda_1 + \varphi_i$, sao cho $\varphi_i(\zeta) = O(\zeta)$. Theo tính tuyến tính của toán tử sai phân chiaΔ^k,

$$\begin{aligned}
&\Delta^k P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}, \ldots, \varphi_{k+1,k+1}) = \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{P^{(j)}_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1)}{j!} \Delta^k (t - \lambda_1)^j (\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}, \ldots, \varphi_{k+1,k+1}) \\
&= \sum_{j=k}^{n} \frac{P^{(j)}_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1)}{j!} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{k+1} \geq 0 \\ i_1+\ldots+i_{k+1}=j-k}} \varphi_1^{i_1} \varphi_2^{i_2} \cdots \varphi_{k+1}^{i_{k+1}} \\
&= \sum_{j=k}^{n} \frac{P^{(j)}_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1)}{j!} O(\zeta^{j-k}) = \sum_{j=k}^{n} O(\zeta^{d_{m_1} - j(B_1) + j - k}),
\end{aligned}$$

do các điều kiện (2.2). Từ Định nghĩa 2.10 ta có $d_{j+1}(B_1) \leq d_j(B_1) + 1$ với $1 \leq j \leq n_1 - 1$, do đó ta thu được, với $k \leq j$, $d_{m_1-j}(B_1) \geq d_{m_1-k}(B_1) - (j-k)$, điều này kéo theo (a).

Để chứng minh (b), ta sử dụng công thức nội suy Newton

$$\begin{aligned}
&P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{m_1+1,m_1+1}) = \\
&= \sum_{k=0}^{m_1} \Delta^k P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \ldots, \varphi_{k+1,k+1}) \cdot (\varphi_{m_1+1,m_1+1} - \varphi_{1,1}) \cdots (\varphi_{m_1+1,m_1+1} - \varphi_{k,k}).
\end{aligned}$$

Để đánh giá vế trái, ta có thể chuyển đổi thứ tự của hai giá trị riêng thứ nhất, và áp dụng phần (a) của Bổ đề với $k = 0$ (do đó điều kiện $\varphi_{m_1+1,m_1+1}(0) = \lambda_2$ là đủ), như vậy ta nhận được
$P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{m_1+1,m_1+1}) = O(\zeta^{d_{m_2}(B_2)})$.

Từ giả thiết, vế phải có thể viết như sau

$$P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1},\dots,\varphi_{m_1+1,m_1+1})\cdot(\varphi_{m_1+1,m_1+1}(0)-\varphi_{m_1,m_1}(0))(1+O(\zeta))+O(\zeta^d),$$

do $\lambda_1 \neq \lambda_2$ kéo theo $(\varphi_{m_1+1,m_1+1}(0)-\varphi_{m_1,m_1}(0)) \neq 0$.

Giải phương trình cho $P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1},\dots,\varphi_{m_1+1,m_1+1})$ dẫn tới kết quả phải chứng minh. □

2.6 Trường hợp $n \leq 5$

Định lý 2.20. *Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq 5$, $A_1,\dots,A_N \in \mathcal{M}_n$, $\alpha_1,\dots,\alpha_N \in \mathbb{D}$ và $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{G}_n)$.*

Khi đó tồn tại $\Phi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\Omega_n)$ thỏa mãn $\varphi = \pi \circ \Phi$ và $\Phi(\alpha_j) = A_j$ với $j = 1,\dots,N$ khi và chỉ khi φ thỏa mãn các điều kiện (2.2) cho mỗi j, với A_j thay cho A_1 và α_j thay cho α, trong đó $1 \leq j \leq N$.

Thêm nữa ta có thể chọn giá trị $\Phi(\zeta)$ là ma trận cyclic khi $\zeta \notin \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$.

Trường hợp $n = 2$ của định lý này được phủ bởi [1] và trường hợp $n = 3$ bởi [19] và [13].

Chứng minh. Mệnh đề 2.11 chứng minh chiều ngược của định lý.

Để chứng minh chiều thuận, theo Mệnh đề 2.17, ta chỉ cần chọn f_k và $\varphi_{k,k}$ sao cho với mỗi j, chúng và các hệ số $\varphi_{n,k}$ được định nghĩa và nhận các giá trị thích hợp tại α_j.

Không mất tính tổng quát (theo Nhận xét 2.3), ta có thể giả sử A_j đang ở dạng Jordan sửa đổi và ta viết $A_j = (a^j_{i,l})_{1\leq i,l\leq n}$. Một yêu cầu đầu tiên là $f_k(\alpha_j) = a^j_{k-1,k}$, $2 \leq k \leq n$, $1 \leq j \leq N$, và $\varphi_{k,k}(\alpha_j) = a^j_{k,k} = \lambda_k(A_j)$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq j \leq N$. Ta cũng đòi hỏi rằng $f_k(\zeta) \neq 0$ trừ phi $\zeta = \alpha_j$ và $a^j_{k-1,k} = 0$, và rằng tất cả các không điểm của mỗi f_k là đơn.

Khẳng định. Ta có thể xác định thêm các điều kiện (nếu cần thiết) trên một số hữu hạn các đạo hàm liên tiếp của $\varphi_{k,k}$ tại α_j để đảm bảo rằng các hệ số $\varphi_{n,k}$, $1 \leq k \leq n-1$, được định nghĩa và nhận giá trị 0 tại α_j.

Nếu khẳng định này xảy ra, thì đa thức nội suy cho phép chúng ta tìm thấy các hàm chỉnh hình f_k và $\varphi_{k,k}$ thỏa mãn tất cả các yêu cầu trên và điều kiện trong Khẳng định.

Phần lý luận còn lại sẽ được dành cho chứng minh khẳng định trên. Ta chỉ cần làm việc tại một điểm $\alpha_j \in \mathbb{D}$, cái mà ta có thể coi là 0 để đơn giản hóa ký hiệu. Cũng như vậy ma trận A_j will be được ký hiệu là $A_1 = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, $n = 4$ or 5, và ở ở dạng Jordan sửa đổi. Nhắc lại rằng các điều kiện (2.2) đã kéo theo $P_{[\varphi(0)]} = P_{A_1}$.

2.6.1 Trường hợp $n = 4$

Ta xét các trường hợp khác nhau tùy theo các giá trị của $(a_{12}, a_{23}, a_{34}) \in \{0,1\}^3$. Nếu $a_{k-1,k} = 1$ với mọi k, A_1 cyclic và các mẫu thức trong công thức đối với $\varphi_{4,k}$ không bao giờ triệt tiêu tại $\zeta = 0$; do $\varphi_{k,k}(0) = \lambda_k$ là một không điểm của $P_{A_1} = P_{[\varphi(0)]}$, $\Delta^{\ell-1}P_{[\varphi(0)]}$ luôn luôn triệt tiêu tại $(\varphi_{1,1}, \ldots, \varphi_{\ell,\ell})$ với $\ell \leq 3$, và chúng ta kết thúc công việc.

Nếu $a_{k-1,k} = 0$ với mọi k, tất cả các giá trị riêng của A_1 phải bằng nhau và chứng minh về cơ bản là đã xong trong [19, Chứng minh Mệnh đề 4.1]. Trong phần sau chúng tôi luôn giả sử rằng A_1 thừa nhận ít nhất 2 giá trị riêng phân biệt.

Nếu có đúng một giá trị của $k \in \{2,3,4\}$ sao cho $a_{k-1,k} = 0$, thì ta có một không gian con riêng chiều 2, ví dụ với $\lambda_1 = \lambda_2$. Không gian con riêng suy rộng tương ứng, $\ker(\lambda_1 I_4 - A_1)^4$, có thể có chiều 2 hoặc 3. Tạm thời chuyển qua dạng Jordan một lúc, trong trường hợp thứ nhất ma trận chẻ ra thành hai khối 2×2 với các giá trị riêng phân biệt và ta có thể giả sử $\ker(\lambda_1 I_4 - A_1) = \mathrm{Span}\{e_1, e_2\}$, và $\lambda_1 \notin \{\lambda_3, \lambda_4\}$. Trong trường hợp thứ hai, $\lambda_3 = \lambda_1$ và ta có thể giả sử $\ker(\lambda_1 I_4 - A_1)^2 = \mathrm{Span}\{e_1, e_2, e_3\}$.

Trong mỗi trường hợp, với các vector cơ sở được hoán vị nếu cần thiết, A_1 thừa nhận dạng Jordan sửa đổi sau:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \text{ với } \lambda_4 \neq \lambda_1. \tag{2.5}$$

Nếu có đúng hai giá trị của $k \in \{2,3,4\}$ sao cho $a_{k-1,k} = 0$, thì có hai trường hợp có thể sau: trong trường hợp thứ nhất, hai chỉ số k thỏa mãn $a_{k-1,k} = 0$ là liên tiếp và chúng ta có một không gian con riêng chiều 3 (và do có ít nhất hai giá trị riêng phân biệt, nên không gian con riêng suy rộng bằng không gian đó), để cho A_1 thừa nhận dạng Jordan sửa đổi sau:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \text{ với } \lambda_4 \neq \lambda_1. \tag{2.6}$$

Trong trường hợp thứ hai, ta có $(a_{12}, a_{23}, a_{34}) = (0,1,0)$, và A_1 thừa nhận dạng Jordan sửa đổi sau:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \text{ với } \lambda_3 \neq \lambda_1. \tag{2.7}$$

Trường hợp 1: A_1 như trong (2.5). Do $f_3(0) = f_4(0) = 1$ và f_2 có một không điểm đơn tại 0, nên ta cần phải chứng minh rằng

$$P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}) = O(\zeta^2), \tag{2.8}$$

$$\Delta^1 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}) = O(\zeta), \tag{2.9}$$

$$\Delta^2 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}, \varphi_{3,3}) = O(\zeta). \tag{2.10}$$

Trong trường hợp này, các điều kiện (2.2) nói rằng

$$P_{[\varphi(0)]}(t) = (t - \lambda_1)^2 (t - \lambda_3)(t - \lambda_4),$$

và

$$P_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1) = O(\zeta^2). \tag{2.11}$$

Áp dụng Bổ đề 2.19(a) với $n_1 = 2$, $k = 0, 1$, ta nhận được (2.8) và (2.9), trong khi đó, khi $\lambda_1 \neq \lambda_3$, ta nhận được (2.10) bằng cách áp dụng Bổ đề 2.19(b) với $n_2 = 1$. Khi $\lambda_1 = \lambda_3$, ta thấy rằng P_{A_1} thừa nhận một không điểm bậc 3 tại λ_1 và do $\varphi_{1,1}(0) = \varphi_{2,2}(0) = \varphi_{3,3}(0) = \lambda_1$, nên $\Delta^2 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}, \varphi_{3,3})$ triệt tiêu khi $\zeta = 0$, đpcm.

Trường hợp 2: A_1 như trong (2.6).
Trong trường hợp này, các điều kiện (2.2) nói rằng

$$P_{[\varphi(0)]}(t) = (t - \lambda_1)^3 (t - \lambda_4),$$

và, do $d_i(B_1) = i$ với $i = 1, 2, 3$, nên

$$P_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1) = O(\zeta^3), \quad P'_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1) = O(\zeta^2). \tag{2.12}$$

Áp dụng Bổ đề 2.19(a) với $m_1 = 3$, ta nhận được $P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}) = O(\zeta^3)$, $\Delta^1 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}) = O(\zeta^2)$, $\Delta^2 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}, \varphi_{3,3}) = O(\zeta)$. Do f_2 và f_3 có một không điểm đơn tại 0, và $f_4(0) \neq 0$, nên đây là cái chúng ta cần để cho $\varphi_{4,l}$ được định nghĩa trong (2.4) triệt tiêu tại 0, với $1 \leq l \leq 3$.

Trường hợp 3: A_1 như trong (2.7).
Đây là trường hợp phức tạp nhất.
Trong trường hợp này, các điều kiện (2.2) nói rằng

$$P_{[\varphi(0)]}(t) = (t - \lambda_1)^2 (t - \lambda_3)^2, \tag{2.13}$$

và

$$P_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1) = O(\zeta^2), \quad P_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_3) = O(\zeta^2). \tag{2.14}$$

Một lần nữa nhắc tới (2.4), ta cần chứng minh rằng

$$P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}) = O(\zeta^3), \tag{2.15}$$

$$\Delta^1 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}) = O(\zeta^2), \tag{2.16}$$

$$\Delta^2 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}, \varphi_{3,3}) = O(\zeta^2). \tag{2.17}$$

Để nhận được điều này, ta cần chọn các giá trị thích hợp cho $\varphi'_{1,1}(0)$ và $\varphi'_{2,2}(0)$.

Chứng minh (2.15)**.**
Đặt $\varphi_{1,1} = \lambda_1 + a$, $\varphi_{2,2} = \lambda_1 + b$, trong đó a, b là các hàm của $\zeta \in \mathbb{D}$. Chú ý rằng $a'(0) = \varphi'_{1,1}(0)$ và $b'(0) = \varphi'_{2,2}(0)$.
Giống như trong chứng minh Bổ đề 2.19(a), ta có

$$\begin{aligned} P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}) &= \Delta^0 P_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1 + a) \\ &= P_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1) + P'_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1)a + P''_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1)\frac{a^2}{2!} + O(\zeta^3). \end{aligned}$$

Theo (2.14), ta có $P_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1) = O(\zeta^2)$, và $P'_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1)a = O(\zeta^2)$. Thêm nữa, từ (2.13), $P''_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1) \neq 0$ tại $\zeta = 0$. Do đó ta có thể chọn $a'(0)$ như là một nghiệm của phương trình bậc hai không tầm thường để làm triệt các hạng tử bậc hai theo ζ.

Chứng minh (2.16)**.**
Như trong chứng minh Bổ đề 2.19(a)

$$\begin{aligned} \Delta^1 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}) &= \Delta^1 P_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1 + a, \lambda_1 + b) \\ &= P'_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1) + P''_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1)\frac{a+b}{2!} + O(\zeta^2). \end{aligned}$$

Ta có $P'_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1) = O(\zeta)$ do λ_1 là nghiệm kép của $P_{[\varphi(0)]}$, và $P''_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda_1) \neq 0$ tại $\zeta = 0$. Do đó ta có thể chọn $b'(0)$ để làm triệt tiêu các hạng tử bậc 1 theo ζ.

Chứng minh (2.17)**.**
Lấy $\varphi_{1,1}$ và $\varphi_{2,2}$ như đã giải thích ở trên, ta áp dụng Bổ đề 2.19(b) với $m_1 = m_2 = 2$, và ta thấy rằng

$$\Delta^2 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}, \varphi_{3,3}) = O(\zeta^2)$$

cho mọi $\varphi_{3,3}$ với $\varphi_{3,3}(0) = \lambda_2$. □

2.6.2 Trường hợp $n = 5$

Như trong trường hợp $n = 4$, giả sử A_1 thừa nhận ít nhất 2 giá trị riêng phân biệt và A_1 không cyclic, do đó nói riêng là có ít nhất một giá trị riêng bội.

Nếu A_1 thừa nhận ít nhất 3 giá trị riêng phân biệt, A_1 sẽ thừa nhận dạng Jordan sửa đổi sau

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix}, \text{ với } \lambda_5 \neq \lambda_1, \lambda_3, \lambda_4 \tag{2.18}$$

trong đó các hoa thị biểu thị cho 0 hoặc 1.

Giả sử $\Phi(\zeta)$ như trong Mệnh đề 2.17.

Do ta luôn có $\Delta^3 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}, \varphi_{3,3}, \varphi_{4,4}) = 0$ at $\zeta = 0$, và $\varphi_{5,4} = -\Delta^3 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}, \varphi_{3,3}, \varphi_{4,4})$ từ (2.4), nên ta chỉ cần xét các sai phân chia tới bậc 2, và chứng minh sẽ giống như trong trường hợp$n = 4$. Điều tương tự nhận được khi $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 \neq \lambda_5$.

Do đó trong trường hợp này, ta chỉ cần xét trường hợp mà A_1 thừa nhận đúng hai giá trị riêng phân biệt, mỗi cái có bội ít nhất 2. Do đó A_1 thừa nhận dạng Jordan sửa đổi sau:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & b_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & b_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \text{ với } \lambda \neq \mu. \tag{2.19}$$

Nếu có một khối cyclic đối với λ hoặc μ, tức là $b_{12} = b_{23} = 1$ hoặc $b_{45} = 1$, khi đó ta có thể thay đổi thứ tự các vector cơ sở để đặt khối cyclic đó ở góc phải dưới của ma trận và thu gọn chứng minh như trong trường hợp $n = 4$. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp mà hai khối này là không cyclic. Trong trường hợp này, A_1 thừa nhận một trong các dạng Jordan sửa đổi sau:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

hoặc

$$A_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Trường hợp 1: A_1 như trong (2.20).
Trong trường hợp này, các điều kiện (2.2) nói rằng

$$P_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda) = O(\zeta^3), P'_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda) = O(\zeta^2), P''_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda) = O(\zeta) \tag{2.22}$$

and

$$P_{[\varphi(\zeta)]}(\mu) = O(\zeta^2), P'_{[\varphi(\zeta)]}(\mu) = O(\zeta). \tag{2.23}$$

Ta cần phải chứng minh rằng

$$P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}) = O(\zeta^4), \tag{2.24}$$

$$\Delta^1 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}) = O(\zeta^3), \tag{2.25}$$

$$\Delta^2 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}, \varphi_{3,3}) = O(\zeta^2), \tag{2.26}$$

$$\Delta^3 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}, \varphi_{3,3}, \varphi_{4,4}) = O(\zeta^2). \tag{2.27}$$

Để nhận được (2.24), (2.25), và (2.26), ta sẽ cần chọn các giá trị thích hợp cho $\varphi'_{1,1}(0)$, $\varphi'_{2,2}(0)$, và $\varphi'_{3,3}(0)$. Chú ý rằng ngay khi ta chọn được các giá trị này thì (2.27) sẽ tự động thỏa mãn theo Bổ đề 2.19(b), áp dụng với $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, và $d = 2$.

Chứng minh (2.24). Đặt $\varphi_{1,1} = \lambda + a$, $\varphi_{2,2} = \lambda + b$ và $\varphi_{3,3} = \lambda + c$. Như trong chứng minh Bổ đề 2.19(a), ta viết

$$\begin{aligned} P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}) &= \Delta^0 P_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda + a) \\ &= P_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda) + P'_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda)a + P''_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda)\frac{a^2}{2!} + P'''_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda)\frac{a^3}{3!} + O(\zeta^4). \end{aligned}$$

Từ các điều kiện (2.22), ta thấy rằng

$$\mathrm{ord}_{\zeta=0}\left\{P_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda) + P'_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda)a + P''_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda)\frac{a^2}{2!}\right\} \geq 3$$

và $P'''_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda) \neq 0$ tại $\zeta = 0$. Do đó ta có thể chọn $a'(0)$ như là một nghiệm của phương trình bậc 3 không tầm thường để làm triệt tiêu các hạng tử bậc 3.

Chứng minh (2.25)**.** Ta có

$$\begin{aligned}\Delta^1 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1},\varphi_{2,2}) &= \Delta^1 P_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda+a,\lambda+b)\\ &= P'_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda)+P''_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda)\frac{a+b}{2!}+P'''_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda)\frac{a^2+ab+b^2}{3!}+O(\zeta^3).\end{aligned}$$

Một lần nữa, ta chọn $b'(0)$ để làm triệt tiêu các hạng tử bậc 2.

Chứng minh (2.26)**.**

$$\begin{aligned}\Delta^2 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1},\varphi_{2,2},\varphi_{3,3}) &= \Delta^2 P_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda+a,\lambda+b,\lambda+c)\\ &= P''_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda)\frac{1}{2!}+P'''_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda)\frac{a+b+c}{3!}+O(\zeta^2).\end{aligned}$$

Một lần nữa ta chọn $c'(0)$ để làm triệt tiêu các hạng tử bậc 1.

Trường hợp 2: A_1 như trong (2.21)**.**
Trong trường hợp này, các điều kiện 2.2 nói rằng

$$P_{[\varphi(\zeta)]}(\mu)=O(\zeta^2), P'_{[\varphi(\zeta)]}(\mu)=O(\zeta), \tag{2.28}$$

và

$$P_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda)=O(\zeta^2), P'_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda)=O(\zeta), P''_{[\varphi(\zeta)]}(\lambda)=O(\zeta) \tag{2.29}$$

Ta cần phải chứng minh rằng

$$P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1})=O(\zeta^3), \tag{2.30}$$

$$\Delta^1 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1},\varphi_{2,2})=O(\zeta^2), \tag{2.31}$$

$$\Delta^2 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1},\varphi_{2,2},\varphi_{3,3})=O(\zeta^2), \tag{2.32}$$

$$\Delta^3 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1},\varphi_{2,2},\varphi_{3,3},\varphi_{4,4})=O(\zeta). \tag{2.33}$$

Chứng minh (2.30)**.** Ta có

$$\begin{aligned}P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}) &= \Delta^0 P_{[\varphi(\zeta)]}(\mu+a)\\ &= P_{[\varphi(\zeta)]}(\mu)+P'_{[\varphi(\zeta)]}(\mu)a+P''_{[\varphi(\zeta)]}(\mu)\frac{a^2}{2!}+O(\zeta^3).\end{aligned}$$

Từ các điều kiện (2.28), ta thấy rằng

$$\operatorname{ord}_{\zeta=0}\left\{P_{[\varphi(\zeta)]}(\mu)+P'_{[\varphi(\zeta)]}(\mu)a\right\}\geq 2$$

và $P''_{[\varphi(\zeta)]}(\mu) \neq 0$ tại $\zeta = 0$, do đó ta có thể chọn $a'(0)$ như là nghiệm của một phương trình bậc hai để làm triệt tiêu các hạng tử bậc 2.

Chứng minh (2.31)**.**

$$\begin{aligned}\Delta^1 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}) &= \Delta^1 P_{[\varphi(\zeta)]}(\mu + a, \mu + b) \\ &= P'_{[\varphi(\zeta)]}(\mu) + P''_{[\varphi(\zeta)]}(\mu)\frac{a+b}{2!} + O(\zeta^2).\end{aligned}$$

Một lần nữa ta chọn $b'(0)$ để làm triệt tiêu các hạng tử bậc 1.

Chứng minh (2.32)**.** Điều này là hệ quả tự động từ (2.30), (2.31) và Bổ đề 2.19(b).

Chứng minh (2.33)**.** Như đã nhận xét sau công thức (2.18), $\Delta^3 P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}, \varphi_{3,3}, \varphi_{4,4})$ luôn luôn triệt tiêu tại $\zeta = 0$.

2.7 Phản ví dụ cho công thức nâng khi $n \geq 6$

Giả sử $\Phi(\zeta)$ được cho bởi công thức như trong Mệnh đề 2.17, và $\Phi(0) = A_1$, với A_1 được mô tả như trong Bổ đề 2.15. Nói riêng ta có $\varphi_{n,1}(\zeta) = O(\zeta)$, và khi đó

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_{\zeta=0}(P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1})) &\geq \operatorname{ord}_{\zeta=0}\varphi_{n,1} + \operatorname{ord}_{\zeta=0}(f_2 f_3 \dots f_n) \\ &\geq 1 + d_{m_1}(B_1) - 1 + \operatorname{ord}_{\zeta=0}(f_{m_1+1} f_{m_1+2} \dots f_n) \qquad (2.34) \\ &\geq d_{m_1}(B_1) + \operatorname{ord}_{\zeta=0}(f_{m_1+1} f_{m_1+2} \dots f_n).\end{aligned}$$

Để tìm một phản ví dụ, ta sẽ tìm một tình huống mà ở đó bất đẳng thức trên không xảy ra.

Xét ma trận cỡ k sau

$$B_k^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & & & & \\ & \lambda & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda & 0 & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

with $\lambda \in \mathbb{D}$. Như thông thường, ta hiểu là có những số 0 ở những chỗ mà

không một hệ số đầu vào nào được nói rõ. Đặt

$$B_k^\lambda(\zeta) = \begin{pmatrix} \lambda & \zeta & & & & \\ & \lambda & \zeta & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda & \zeta & \\ & & & & \lambda & 1 \\ \zeta & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

với $\zeta \in \mathbb{D}$. Đa thức đặc trưng của nó được cho bởi công thức

$$P_{B_k^\lambda(\zeta)}(t) = \det(tI_n - B^\lambda(\zeta)) = (t-\lambda)^k - \zeta^{k-1}.$$

Tách $n = k + l$ với $k, l \geq 3$.

Xét ma trận

$$B = \begin{pmatrix} B_k^{\lambda_1} & \\ & B_l^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

với $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{D}$. Đặt

$$B(\zeta) = \begin{pmatrix} B_k^{\lambda_1}(\zeta) & \\ & B_l^{\lambda_2}(\zeta) \end{pmatrix}.$$

Đặt $\varphi(\zeta) = (\pi \circ B)(\zeta)$, ta có

$$P_{[\varphi(\zeta)]}(t) = P_{B(\zeta)}(t) = P_{B_k^{\lambda_1}(\zeta)}(t) P_{B_l^{\lambda_2}(\zeta)}(t).$$

Bây giờ giả sử là ta có thể tìm thấy ánh xạ nâng $\Phi(\zeta)$ ở dạng được phát biểu ở Mệnh đề 2.17. Bất đẳng thức (2.34) cho ta ước lượng

$$\operatorname{ord}_{\zeta=0} P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}) \geq 1 + (k-2) + (l-2) = k + l - 3 \geq k.$$

Do $P_{B_l^{\lambda_2}}(\zeta)(\varphi_{1,1}) \neq 0$ tại $\zeta = 0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_{\zeta=0} P_{[\varphi(\zeta)]}(\varphi_{1,1}) &= \operatorname{ord}_{\zeta=0} P_{B_k^{\lambda_1}(\zeta)}(\varphi_{1,1}) \\ &= \operatorname{ord}_{\zeta=0} \left\{ (\varphi_{1,1} - \lambda_1)^k - \zeta^{k-1} \right\} \\ &= k - 1. \end{aligned}$$

Điều này cho ta một mâu thuẫn. Ta có thể nhận xét rằng miền giá trị của có thể không nằm trong $\mathbb{G}_n$. Tuy nhiên, $\varphi(0) \in \mathbb{G}_n$, do đó ta luôn luôn có thể tham số hóa lại φ bằng cách thay ζ bởi $\varepsilon\zeta$ với ε đủ nhỏ.

Chương 3

Bài toán nâng ánh xạ từ đa đĩa đối xứng hóa có điều kiện đạo hàm bậc nhất

Trong chương này, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu bài toán nâng với đạo hàm bậc nhất cho trước. Điều đó có nghĩa là $\Phi(0)$ và $\Phi'(0)$ nhận các giá trị cho trước. Công việc này có thể được coi là sự tiếp tục của các nghiên cứu của ba tác giả [13] cho chiều 4(các tác giả đó đã xử lý trường hợp chiều 3).

3.1 Phát biểu bài toán

Nhắc lại rằng $\pi\colon \Omega_4 \to \mathbb{G}_4$ là phép chiếu thông thường (hay ánh xạ đối xứng hóa) (xem Định nghĩa 2.1). Cho $B_0 \in \Omega_4$ và B_1 là một ma trận vuông phức cấp 4. Cho $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{G}_4$ là một đĩa chỉnh hình sao cho $\varphi(0) = \pi(B_0)$ và $\varphi'(0) = D\pi_{B_0}B_1$, trong đó $D\pi_{B_0}$ là đạo hàm của π tại B_0. Bộ ba như thế được gọi là dữ liệu, được ký hiệu bởi $\{\varphi, B_0, B_1\}$.

Ta nói dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ là **nâng được địa phương** nếu tồn tại một ánh xạ chỉnh hình $\Phi\colon \omega \to \Omega_4$ trong đó ω là một lân cận của $0 \in \mathbb{C}$ sao cho

$$\begin{cases} \varphi = \pi \circ \Phi \text{ trên } \omega \\ \Phi(0) = B_0 \\ \Phi'(0) = B_1 \end{cases}.$$

Trong trường hợp này, ta gọi Φ là ánh xạ nâng (địa phương) của φ.

Bài toán 3.1. *Cho $\{\varphi, B_0, B_1\}$ là một dữ liệu. Tìm các điều kiện cần và đủ đối với φ sao cho dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ là nâng được địa phương.*

3.2 Những thu gọn đầu tiên của bài toán

Ta nói rằng hai dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ và $\{\varphi, B_0', B_1'\}$ là *tương đương* nếu tồn tại các ánh xạ chỉnh hình $\Phi\colon \omega \to \Omega_4$ và $P\colon \omega \to \mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$ sao cho $\begin{cases} \Phi(0) & = B_0 \\ \Phi'(0) & = B_1 \end{cases}$ và $\begin{cases} (P^{-1}\cdot\Phi\cdot P)(0) & = B_0' \\ (P^{-1}\cdot\Phi\cdot P)'(0) & = B_1' \end{cases}$. Chú ý rằng φ không tham gia vào định nghĩa của tính tương đương. Ta dễ dàng thấy rằng nếu hai dữ liệu tương đương thì tính nâng được của dữ liệu này kéo theo tính nâng được của dữ liệu còn lại.

Ta quan sát mối quan hệ giữa (B_0, B_1) và (B_0', B_1') một cách chi tiết hơn: Đầu tiên, Ta có $B_0' = P(0)^{-1}B_0P(0)$, do đó hai ma trận B_0 và B_0' là đồng dạng. Điều này kéo theo rằng hai dữ liệu (φ, B_0, B_1) và $(\varphi, C^{-1}B_0C, C^{-1}B_1C)$ là tương đương với mọi $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Do đó ta có thể giả sử B_0 ở dạng Jordan, và kể từ bây giờ ta luôn giả sử điều đó.

Bây giờ, giả sử hai dữ liệu (φ, B_0, B_1) và (φ, B_0, B_1') là tương đương. Khi đó $P(0)$ là một ma trận giao hoán với B_0. Thêm nữa,

$$\begin{aligned} B_1' &= P(0)^{-1}B_1P(0) + P(0)^{-1}B_0P'(0) - P(0)^{-1}P'(0)P(0)^{-1}B_0P(0) \\ &= P(0)^{-1}B_1P(0) + P(0)^{-1}B_0P'(0) - P(0)^{-1}P'(0)B_0 \\ &\qquad (\text{ do } P(0) \text{ giao hoán với } B_0) \\ &= P(0)^{-1}B_1P(0) + P(0)^{-1}\Big(B_0P'(0) - P'(0)B_0\Big) \\ &= P(0)^{-1}B_1P(0) + P(0)^{-1}[B_0, P'(0)] \end{aligned} \tag{3.1}$$

trong đó $[B_0, P'(0)] = B_0P'(0) - P'(0)B_0$ là giao hoán tử thông thường.

Do đó, ta có

Mệnh đề 3.2. *Hai dữ liệu (φ, B_0, B_1) và $(\varphi, B_0, C^{-1}B_1C + C^{-1}[B_0, M])$ là tương đương trong đó $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ giao hoán với B_0 và $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ là ma trận vuông bất kỳ.*

Giả sử $\mathrm{Sp}(B_0) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ trong đó các λ_i là phân biệt và

$$B_0 = \begin{pmatrix} B_{0,\lambda_1} & & & \\ & B_{0,\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{0,\lambda_k} \end{pmatrix}$$

là dạng khối của B_0 trong đó $\mathrm{Sp}(B_{0,\lambda_i}) = \{\lambda_i\}$. Nhắc lại ký hiệu $P_{[\varphi(\zeta)]}(t) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\varphi_j(\zeta)t^{n-j}$ trong đó $\varphi_0 \equiv 1$ theo quy ước từ Định nghĩa 2.8. Đa

thức này có thể phân tích thành k nhân tử đôi một nguyên tố cùng nhau

$$P_{[\varphi]}(t) = P_{[\varphi_1]}(t)P_{[\varphi_2]}(t)\dots P_{[\varphi_k]}(t)$$

trong đó $\varphi_j(0) = \pi(B_{0,\lambda_j})$ với mỗi j. Thêm nữa, nếu Φ là một ánh xạ nâng của (φ, B_0, B_1), thì $\mathrm{Ker}(P_{[\varphi_j(\zeta)]}(\Phi(\zeta)))$ là một không gian con bất biến của Φ tại mỗi giá trị của ζ và

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(P_{[\varphi_j(\zeta)]}(\Phi(\zeta))).$$

Điều đó có nghĩa là tính nâng được địa phương của (φ, B_0, B_1) tương đương với tính nâng được địa phương một cách đồng thời của k dữ liệu mới $(\varphi_j, B_{0,\lambda_j}, B_{1,\lambda_j})$.

Vì thế ta chỉ cần xét trường hợp mà B_0 có đúng một giá trị riêng và trong trường hợp đó, bằng cách áp dụng biến đổi Mobius $M \mapsto (M-\lambda I)(I-\bar{\lambda}M)^{-1}$, ta có thể giả sử B_0 lũy linh.

Trong mục tới, chúng tôi trình bày khái niệm tích hộp để tuyến tính hóa các hàm đặc trưng $\sigma_j(M)$ với $1 \le j \le n$ và $M \in \mathbb{C}^{n,n}$.

3.3 Tích hộp

Định nghĩa 3.3. Cho $f_1, f_2, \dots$ và f_q các tự đồng cấu của một không gian vector E. Ta định nghĩa *tích hộp* của $f_1, f_2, \dots$ và f_q, ký hiệu bởi $f_1 \,\square\, f_2 \dots \,\square\, f_q$, là một tự đồng cấu của $\bigwedge^q E$ như sau.

Nếu $e_1, e_2, \dots, e_q$ là vector trong E, thì

$$(f_1 \,\square\, f_2 \dots \,\square\, f_1)(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_q) = \sum_{\sigma \in S_q} \mathrm{sgn}(\sigma) f_1(e_{\sigma(1)}) \wedge f_2(e_{\sigma(2)}) \wedge \dots \wedge f_q(e_{\sigma(q)}).$$

Chúng tôi phát biểu một vài tính chất cơ bản của tích hộp. Ta có thể tham khảo [10] cho các chứng minh.

Mệnh đề 3.4. *Cho E là một không gian vector chiều n. Với mỗi tự đồng cấu $T\colon E \to E$ ta ký hiệu $\mathrm{Tr}(T)$ là vết của nó. Cho $f, g, f_1, \dots, f_q\colon E \to E$ là các tự đồng cấu.*

(a) Ta có

$$\mathrm{Tr}(\underbrace{f \,\square\, \dots \,\square\, f}_{m \text{ lần}}) = m!\mathrm{Tr}\left(\bigwedge^m f\right) = m!\sigma_m(f)$$

trong đó $1 \le m \le \dim E$.

(b) Tích hộp của $f_1, f_2, \ldots, f_q$ không phụ thuộc vào thứ tự của $f_1, f_2, \ldots, f_q$, tức là

$$f_1 \,\square\, f_2 \,\square\, \ldots \,\square\, f_q = f_{i_1} \,\square\, \ldots \,\square\, f_{i_q}$$

trong đó $i_1, i_2, \ldots, i_q$ là hoán vị bất kỳ của $1, 2, \ldots, q$.

(c)

$$\mathrm{Tr}(f_1 \,\square\, \ldots \,\square\, f_m \,\square\, \underbrace{\mathrm{Id} \,\square\, \ldots \,\square\, \mathrm{Id}}_{p \text{ lần}}) = \mathrm{C}_{n-m}^{p} \mathrm{Tr}(f_1 \,\square\, \ldots \,\square\, f_m).$$

(d)

$$\det(f+g) = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p \mathrm{Tr}(\underbrace{f \,\square\, \ldots \,\square\, f}_{p \text{ lần}} \,\square\, \underbrace{g \,\square\, \ldots \,\square\, g}_{n-p \text{ lần}}).$$

(e) Cho $f_1, f_2, g_1, g_2 \colon E \to E$ là các tự đồng cấu. Khi đó

$$(f_1 \,\square\, f_2) \circ (g_1 \,\square\, g_2) = (f_1 \circ g_1) \,\square\, (f_2 \circ g_2) + (f_1 \circ g_2) \,\square\, (f_2 \circ g_1).$$

Các ma trận vuông cũng có thể coi là các tự đồng cấu của các không gian vector Euclid $\mathbb{C}^n$, do đó tích hộp có thể được định nghĩa cho các ma trận vuông. Do ta chủ yếu thao tác với các ma trận vuông, nên chúng tôi cung cấp một ký hiệu mới. Đầu tiên, ký hiệu $\mathbb{C}^{m,n}$ hoặc $\mathbb{C}^{m\times n}$ là không gian tất cả các ma trận phức cấp $m \times n$.

Ký hiệu 3.5. Cho $B_1, B_2, \ldots, B_k \in \mathbb{C}^{n,n}$. Thay vì viết $\mathrm{Tr}(B_1 \,\square\, B_2 \,\square\, \ldots \,\square\, B_k)$ cho vết của tích hộp của $B_1, B_2, \ldots, B_k$, ta sẽ sử dụng ký hiệu

$$B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots \cdot B_k.$$

Ta sẽ thường xuyên bỏ qua các dấu chấm, cụ thể $B_1 B_2 \ldots B_k$, do không có các phép nhân ma trận sẽ được sử dụng.

Chúng tôi trình bày cách tính các đại lượng $B_1 B_2 \ldots B_k$ với $B_1, B_2, \ldots, B_k \in \mathbb{C}^{n,n}$. Đầu tiên, cho $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ là dãy số nguyên bất kỳ và σ là hoán vị bất kỳ của $\{1, 2, \ldots, k\}$. Khi đó ký hiệu

$$(i_1)_{B_{\sigma(1)}} \cdot (i_2)_{B_{\sigma(2)}} \cdot \ldots \cdot (i_k)_{B_{\sigma(k)}}$$

là định thức của ma trận vuông cấp k có cột thứ r được cấu tạo từ các hệ số ở vị trí (i_r, i_1), (i_r, i_2), …, (i_r, i_k) của ma trận $B_{\sigma(r)}$. Cuối cùng, nhờ các ký hiệu này, ta có thể viết

$$B_1 B_2 \ldots B_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \sum_{\sigma \in S_k} (i_1)_{B_{\sigma(1)}} \cdot (i_2)_{B_{\sigma(2)}} \cdot \ldots \cdot (i_k)_{B_{\sigma(k)}}.$$

Chúng tôi đưa ra một ví dụ để minh họa cách tính toán.

Ví dụ Cho $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{3,3}$. Khi đó

$$A \cdot B = 1_A \cdot 2_B + 1_A \cdot 3_B + 2_A \cdot 3_B + 1_B \cdot 2_A + 1_B \cdot 3_A + 2_B \cdot 3_A,$$

trong đó $1_A \cdot 2_B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$, $1_A \cdot 3_B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix}$, và tiếp tục như vậy.

3.4 Những phân tích đầu tiên về bài toán

Giả sử dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ có nâng địa phương Φ. Như trên, giả sử B_0 lũy linh. Ta nhắc lại các số d_i liên kết với B_0 mà đã được trình bày trong Định nghĩa 2.10. Cụ thể, ký hiệu (b_{ij}) là các hệ số của B_0 (thỉnh thoảng ta viết $(b_{i,j})$ nếu có nhu cầu tách biệt hai chỉ số), khi đó đặt

$$\begin{aligned} F_0 &= \{j\colon\ b_{j-1,j} = 0\} \cup \{1\} \\ &= \{b_1 = 1 < b_2 < \ldots < b_s\}. \end{aligned}$$

Số s ở đây là số các khối Jordan sơ cấp của B_0.

Tiếp theo, ta sắp xếp các khối Jordan sơ cấp của B_0 sao cho $b_{j+1} - b_j$ tăng với quy ước $b_{s+1} = \text{size}(B_0) + 1 = n + 1$. Khi đó

$$d_i = 1 + \sharp\left(F_0 \cap [n + 2 - i..n]\right).$$

Do dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ là nâng được địa phương, nên theo chương trước,

$$P^{(k)}_{[\varphi(\zeta)]}(0) = \mathcal{O}(\zeta^{d_{n-k}}) \text{ với } 0 \le k \le n - 1.$$

Nhưng $P^{(k)}_{[\varphi(\zeta)]}(0) = k!\sigma_{n-k}(-\Phi(\zeta)) = (-1)^{n-k}k!\sigma_{n-k}(\Phi(\zeta)) = (-1)^{n-k}k!\varphi_{n-k}(\zeta)$. Do đó, đối với ma trận lũy linh B_0, các điều kiện có dạng đơn giản như sau

$$\varphi_k(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{d_k}).$$

Ký hiệu $\Phi^{(k)}(0) = B_k$ là đạo hàm thứ k của Φ tại $\zeta = 0$. Ta biết là B_0, B_1 được cho trước, do đó các ma trận khác B_k là cái cần tìm. Một cách tự nhiên, các quan hệ giữa các B_k này bị chi phối bởi các điều kiện của φ tại $\zeta = 0$, tức là các giá trị của đạo hàm của nó ở đó. Do đó chúng ta phải tính các đạo hàm này theo Φ, tức là tính

$$\left.\frac{d^k}{d\zeta^k}\right|_{\zeta=0} \sigma_m(\Phi(\zeta)).$$

Mà ta đã biết từ tích hộp là

$$\sigma_m(\Phi) = \frac{1}{m!}\mathrm{Tr}(\underbrace{\Phi\Box\ldots\Box\Phi}_{m \text{ lần}}) = \frac{1}{m!}\underbrace{\Phi\cdot\ldots\cdot\Phi}_{m \text{ lần}}.$$

Theo luật Leibniz tổng quát,

$$\left.\frac{d^k}{d\zeta^k}\right|_{\zeta=0}\sigma_m(\Phi(\zeta)) = \frac{1}{m!}\sum_{\substack{j_1+j_2+\ldots+j_m=k\\ j_i\geq 0}}\frac{k!}{j_1!j_2!\ldots j_m!}\Phi^{(j_1)}(0)\Phi^{(j_2)}(0)\ldots\Phi^{(j_m)}(0) \tag{3.2}$$

$$= \frac{1}{m!}\sum_{\substack{j_1+j_2+\ldots+j_m=k\\ j_i\geq 0}}\frac{k!}{j_1!j_2!\ldots j_m!}B_{j_1}B_{j_2}\ldots B_{j_m}. \tag{3.3}$$

Hay nói cách khác,

$$\varphi_m^{(k)}(0) = \frac{1}{m!}\sum_{\substack{j_1+j_2+\ldots+j_m=k\\ j_i\geq 0}}\frac{k!}{j_1!j_2!\ldots j_m!}B_{j_1}B_{j_2}\ldots B_{j_m}. \tag{3.4}$$

Đây là các phương trình theo B_k với $k \geq 2$. Một nghiệm $\{B_k\}_{k\geq 2}$ của các phương trình này không nhất thiết tạo thành một ánh xạ chỉnh hình địa phương Φ quanh $\zeta = 0$. Điều đó có nghĩa là ta cần phải xử lý vấn đề hội tụ của nghiệm. Chúng tôi sẽ bàn điều đó sau.

3.5 Các trường hợp của B_0

Phát biểu các kết quả và chứng minh của Bài toán 3.1 sẽ được trình bày theo các trường hợp của B_0, cụ thể là theo dạng Jordan của B_0. Do B_0 lũy linh và không cyclic[1], nên có ba trường hợp cần xét:

(I) $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (III) $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(II) $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[1]Trường hợp B_0 cyclic đã được xử lý trong bài báo của Huang, Marcantognini và Young [12].

3.6 Ánh xạ tuyến tính liên kết L_{B_0,B_1}, các điều kiện và lược đồ chứng minh

Cho $\{\varphi, B_0, B_1\}$ là một dữ liệu của bài toán nâng. Như chúng tôi đã lý luận trước đó, ta có thể giả sử B_0 là lũy linh và có dạng Jordan. Ký hiệu d_i là các số liên kết với B_0. Ví dụ, nếu

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

thì $d_1 = d_2 = d_3 = 1$ và $d_4 = 2$.

Nếu φ nâng được địa phương, thì $\varphi(0) = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^n$. Ta sẽ quan tâm ở đây trường hợp tổng quát trong đó n là cỡ của ma trận B_0. Nhưng chúng tôi chỉ có thể đưa ra các chứng minh cho trường hợp $n = 4$ trong các mục tiếp theo.

Ta biết từ Chương 2, điều kiện này kéo theo rằng

$$P^{(k)}_{[\varphi(\zeta)]}(0) = \mathcal{O}(\zeta^{d_{n-k}})$$

với $0 \le k \le n-1$. Nhưng vế trái là $k!(-1)^{n-k}\varphi_{n-k}(\zeta)$, nên ta nhận được các điều kiện đơn giản

$$\varphi_j(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{d_j}) \text{ với } 1 \le j \le n. \tag{3.5}$$

Các điều kiện này cho một hệ quả như sau.

Hệ quả 3.6. *Giả sử $B_0 \in \mathbb{C}^{n,n}$ lũy linh và $d_1, \ldots, d_n$ là các số liên kết của nó. Với $M_1, M_2, \ldots, M_k \in \mathbb{C}^{n,n}$ và $d_i \ge k+1$, ta luôn có*

$$\underbrace{B_0 B_0 \ldots B_0}_{i-k \text{ lần}} M_1 M_2 \ldots M_k = 0.$$

Nhắc lại rằng ta luôn có B_k là đạo hàm thứ k, hay $\Phi^{(k)}(0)$, của ánh xạ nâng Φ. Nhờ Hệ quả 3.6, các phương trình tại (3.4) có dạng

$$\varphi_m^{(k+d_m-1)}(0) = \frac{(k+d_m-1)!}{k!} \frac{\overbrace{B_0 B_0 \ldots B_0}^{m-d_m \text{ lần}} \overbrace{B_1 B_1 \ldots B_1}^{d_m-1 \text{ lần}} B_k}{(m-d_m)!(d_m-1)!} + \ldots \tag{3.6}$$

trong đó các dấu chấm biểu thị cho các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k$. Điều này gợi ý là ta nên sắp xếp các phương trình tại (3.4) thành các nhóm gồm n phương trình. Cụ thể là đặt

$$\mathfrak{X}_k = \left\{ \frac{\varphi_1^{(k+d_1-1)}(0)}{(k+1)(k+2)\dots(k+d_1-1)}, \frac{\varphi_2^{(k+d_2-1)}(0)}{(k+1)(k+2)\dots(k+d_2-1)}, \dots \right.$$
$$\left. , \frac{\varphi_n^{(k+d_n-1)}(0)}{(k+1)(k+2)\dots(k+d_n-1)} \right\}. \quad (3.7)$$

Khi đó vế trái của các phương trình của φ (3.4) bị áp đặt bởi các giá trị của đạo hàm thứ k của ánh xạ φ, với mọi $k \geq 2$, chính là $\mathfrak{X}_k$ với $k \geq 2$ (nhận xét là với $k = 0$, và 1, B_0 và B_1 đã được cho trước).

Chúng ta mô tả vế phải của các phương trình đó. Xét ánh xạ tuyến tính sau $L_{B_0,B_1} : \mathbb{C}^{n,n} \to \mathbb{C}^n$ trong đó tọa độ thứ m của $L_{B_0,B_1}(M)$ với $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ được định nghĩa bởi công thức

$$\frac{\overbrace{B_0B_0\dots B_0}^{m-d_m \text{ lần}}\overbrace{B_1B_1\dots B_1}^{d_m-1 \text{ lần}}M}{(m-d_m)!(d_m-1)!}.$$

Ta gọi ánh xạ L_{B_0,B_1} này là *ánh xạ tuyến tính liên kết* với bài toán nâng (hoặc với dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$).

Bây giờ ta quan sát $\mathfrak{X}_k$ với $k \geq 2$. Nhận xét

$$\mathfrak{X}_k = L_{B_0,B_1}(B_k) + \dots$$

trong đó các dấu chấm biểu thị cho các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k$.

Ta nhận xét là nếu $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = n$, tức là L_{B_0,B_1} có hạng cực đại, thì ta có thể tìm thấy một dãy $\{B_k\}_{k\geq 2}$ là nghiệm của các phương trình trong đó B_k cần phải được tìm trước B_{k+1}.

Tuy nhiên, điều này không đảm bảo sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\zeta^k$ trong khi điều này là cần thiết cho việc Φ chỉnh hình trong một lân cận của $\zeta = 0$. Ta sẽ bàn về điều này trong một lát nữa.

Ta nhận xét là nếu $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) < n$, thì điều này cho ta một quan hệ tuyến tính giữa các đại lượng của $\mathfrak{X}_k$. Cụ thể là B_k có thể bị triệt tiêu khỏi tổ hợp tuyến tính nào đó của các vế phải của (3.4) để sản xuất ra các phương trình không phụ thuộc vào B_k, tức là chỉ phụ thuộc vào B_0, B_1, ..., B_{k-1}. Nhận xét là ta xét $B_2, B_3, \dots$, như là một chuỗi các thông tin mà trong đó B_{k-1} là thông tin biết trước thông tin B_k. Khi $k = 2$, điều này cho ta các

điều kiện cần cụ thể về φ, và đây chính là cách mà các tác giả trong [13] đã nhận được các điều kiện cần.

Trong trường hợp mà $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) < n$, một vài đại lượng của $\mathfrak{X}_k$ không có sự tham gia của B_k, ví dụ, $\varphi_n^{(k+d_n-1)}(0)$. Vì thế việc xét các đạo hàm tiếp theo là tự nhiên, ví dụ, $\varphi_n^{(k+d_n)}(0)$ cho tới khi nó phụ thuộc vào B_k nhưng không phải phụ thuộc vào B_{k+1}. Bằng cách này, chúng tôi thực tế đã thay L_{B_0,B_1} bởi một ánh xạ mới L_{B_0,B_1,B_2} mà B_2 tham gia vào trong định nghĩa của L_{B_0,B_1,B_2} nhưng không có B_k nào khác với $k \geq 3$. Ánh xạ mới L_{B_0,B_1,B_2} này phải có hạng cực đại.

Tuy nhiên, ta vẫn còn vấn đề về sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\zeta^k$. Điều này hóa ra cũng không quá khó khăn: nếu ta có thể tìm được một nghiệm$\{B_k\}$ có dạng B_k là các ma trận chỉ gồm đúng một dòng khác 0, thì sự hội tụ được đảm bảo, do dãy B_k sẽ bị chi phối bởi một quan hệ hồi quy tuyến tính và ta có thể đánh giá được chuẩn của chúng.

Để làm điều này, chúng tôi phải tìm một ma trận B_2 thích hợp sao cho hạn chế của L_{B_0,B_1,B_2} lên không gian con của $\mathbb{C}^{n,n}$, gồm các ma trận có đúng dòng cuối khác 0, có hạng cực đại, tức là có hạng bằng n.

Chứng minh khi đó chủ yếu là kỹ thuật tính toán và rất dài dòng.

3.7 Trường hợp thứ nhất của B_0

Trong mục này, chúng tôi sẽ trình bày các kết quả và chứng minh trong trường hợp mà

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Đây là trường hợp dễ nhất trong ba trường hợp vì B_0 chính quy nhất.

Giả sử ta có dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$. Đầu tiên chúng ta phải tìm được các điều kiện cần để cho dữ liệu nâng được địa phương. Cho Φ là một ánh xạ nâng địa phương. Nhắc lại rằng chúng ta luôn ký hiệu B_k là đạo hàm thứ k của Φ tại $\zeta = 0$.

Luôn quan tới các hệ số của B_k, ta ký hiệu chúng như sau: B_1 luôn được ký hiệu là (b_{ij}), còn với $k \geq 2$, thì $B_k = \left(b_{ij}^{(k)}\right)$.

Do $\varphi(0) = (\pi \circ \Phi)(0) = \pi(B_0) = (0,0,0,0)$, ta có các điều kiện cần đầu tiên là

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0.$$

Tiếp theo, ta xét đạo hàm thứ nhất $\varphi'(0) = (\pi \circ \Phi)'(0) = \mathrm{D}\pi_{B_0} B_1$. Ta thu được tập hợp thứ hai các điều kiện cần

(i) $\varphi_1'(0) = \sigma_1(B_1)$,

(ii) $\varphi_2'(0) = B_0 B_1 = -b_{32} - b_{43}$,

(iii) $\varphi_3'(0) = \frac{B_0 B_0 B_1}{2} = b_{42}$,

(iv) $\varphi_4'(0) = \frac{B_0 B_0 B_0 B_1}{3!} = 0$.

Tiếp tục tới đạo hàm thứ hai $\varphi''(0)$, ta thấy rằng chỉ có $\varphi_4''(0)$ bị tác động bởi B_0, B_1, còn các tọa độ khác chịu tác động của B_0, B_1, B_2. Ta thu được điều kiện cần

$$\varphi_4''(0) = \frac{B_0 B_0 B_1 B_1}{2} = 2 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix}.$$

Tiếp theo, ta tính đạo hàm thứ k-th của φ tại $\zeta = 0$ để nhận được ánh xạ tuyến tính liên kết L_{B_0,B_1}. Nhờ (3.4), với $k \geq 2$ ta có

$$\varphi_1^{(k)}(0) = \sigma_1(B_k), \tag{3.8}$$

$$\varphi_2^{(k)}(0) = B_0 B_k + \dots, \tag{3.9}$$

$$\varphi_3^{(k)}(0) = \frac{B_0 B_0 B_k}{2} + \dots, \tag{3.10}$$

$$\frac{\varphi_4^{(k+1)}(0)}{k+1} = \frac{B_0 B_0 B_1 B_k}{2} + \dots \tag{3.11}$$

trong đó các dấu chấm biểu thị các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k$. Do đó ánh xạ tuyến tính liên kết L_{B_0,B_1} được định nghĩa bởi

$$\mathbb{C}^{4,4} \ni M \mapsto L_{B_0,B_1}(M) = \left(\sigma_1(M), B_0 M, \frac{B_0 B_0 M}{2}, \frac{B_0 B_0 B_1 M}{2}\right).$$

Chúng tôi liệt kê các hệ số của ánh xạ này theo các hệ số đầu vào của $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4}$ trong bảng sau.

Bảng 3.1: Bảng hệ số cho ánh xạ tuyến tính liên kết

	$\sigma_1(M)$	B_0M	$\frac{B_0B_0M}{2}$	$\frac{B_0B_0B_1M}{2}$
m_{11}	1			b_{42}
m_{12}				$-b_{41}$
m_{13}				
m_{14}				
m_{21}				
m_{22}	1			
m_{23}				
m_{24}				
m_{31}				
m_{32}		-1		
m_{33}	1			
m_{34}				
m_{41}				$-b_{12}$

Tiếp theo ở trang tiếp

Bảng 3.1 – tiếp tục từ trang trước

	$\sigma_1(M)$	B_0M	$\frac{B_0B_0M}{2}$	$\frac{B_0B_0B_1M}{2}$
m_{42}			1	b_{11}
m_{43}		-1		
m_{44}	1			

Từ bảng này, ta thấy rằng có hai trường hợp về hạng của L_{B_0,B_1} như sau.

- $\text{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$ khi và chỉ khi $b_{12} = b_{41} = b_{42} = 0$.
- $\text{rank}(L_{B_0,B_1}) = 4$ khi và chỉ khi b_{12} hoặc b_{41} hoặc b_{42} khác 0.

Tiếp theo, chúng tôi liệt kê một vài thông tin hữu ích mà sẽ được dùng sau này, ví dụ như giao hoán tử với B_0. Nhắc lại rằng ta có thể thay thế B_1 bởi $B_1 - [B_0, M]$ (xem Mệnh đề 3.2).

Bảng 3.2: Các thông tin hữu ích về B_0 và đạo hàm thứ nhất của φ tại $\zeta = 0$

$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$d_1 = d_2 = d_3 = 1, d_4 = 2$
$[B_0, M] = B_0M - MB_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_{12} & -m_{13} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} - m_{22} & m_{34} - m_{23} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} - m_{32} & m_{44} - m_{33} \\ 0 & 0 & -m_{42} & -m_{43} \end{bmatrix}$	

Bởi dòng trên, ta có thể giả sử $B_1 = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$		
$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$		
$\varphi_1'(0)$	$=$	$\sigma_1(B_1)$
$\varphi_2'(0)$	$=$	B_0B_1
$\varphi_3'(0)$	$=$	$\frac{B_0B_0B_1}{2}$
$\varphi_4'(0)$	$=$	$\frac{B_0B_0B_0B_1}{3!} = 0$
$\varphi_1''(0)$	$=$	$\sigma_1(B_2)$
$\varphi_2''(0)$	$=$	$B_0B_2 + 2\sigma_2(B_1)$
$\varphi_3''(0)$	$=$	$\dfrac{B_0B_0B_2}{2} + B_0B_1B_1$
$\varphi_4''(0)$	$=$	$\dfrac{B_0B_0B_1B_1}{2}$

Chúng tôi trình bày các kết quả tương ứng với mỗi trường hợp về hạng của L_{B_0,B_1} trong hai mục con tới.

3.7.1 Trường hợp $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$

Trong trường hợp này, $b_{12} = b_{41} = b_{42} = 0$, do đó

$$B_1 = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Từ Bảng 3.1, sự kiện $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$ tương đương với việc

$$\frac{B_0B_0B_1M}{2} = b_{11}\frac{B_0B_0M}{2}. \tag{3.12}$$

Nếu φ nâng được địa phương, thì $\frac{B_0B_0B_2}{2} = \varphi_3''(0) - B_0B_1B_1$ và $\frac{B_0B_0B_1B_2}{2} = \frac{\varphi_4'''(0)}{3} - \frac{B_0B_1B_1B_1}{3}$. Điều này kéo theo

$$\frac{\varphi_4'''(0)}{3} - \frac{B_0B_1B_1B_1}{3} = b_{11}\left(\varphi_3''(0) - B_0B_1B_1\right).$$

Chúng tôi phát biểu định lý.

Định lý 3.7. *Giả sử* $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$. *Dữ liệu* $\{\varphi, B_0, B_1\}$ *nâng được địa phương khi và chỉ khi các điều kiện sau được thỏa mãn*

(i) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$,

(ii) $\varphi_1'(0) = \sigma_1(B_1)$, $\varphi_2'(0) = B_0B_1$, $\varphi_3'(0) = \dfrac{B_0B_0B_1}{2}$,

(iii) $\varphi_4'(0) = 0$, $\varphi_4''(0) = \dfrac{B_0B_0B_1B_1}{2} = 0$,

(iv) $\dfrac{\varphi_4'''(0)}{3} - b_{11}\varphi_3''(0) = \dfrac{B_0B_1B_1B_1}{3} - b_{11}B_0B_1B_1$.

Chứng minh Định lý 3.7 Các điều kiện cần được chứng minh ngay trước phát biểu định lý. Do đó ta chỉ còn phải chứng minh rằng chúng là các điều kiện đủ.

Để làm điều này, ta sẽ tìm B_k với $k \geq 2$ mà thỏa mãn các phương trình (3.4).

Do $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$, ta phải thay thế nó bởi một ánh xạ mới L_{B_0,B_1,B_2} có các tính chất thích hợp. Để làm điều đó, ta phải tính đạo hàm $\varphi_4^{(k+2)}(0)$ với $k \geq 3$.

$$\varphi_4^{(k+2)}(0) = \frac{k+2}{2} B_0 B_0 B_1 B_{k+1} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} B_0 B_1 B_1 B_k + \frac{(k+1)(k+2)}{4} B_0 B_0 B_2 B_k + \dots \quad (3.13)$$

trong đó các dấu chấm biểu thị các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k$. Tương tự ta có

$$\varphi_3^{(k+1)}(0) = \frac{B_0 B_0 B_{k+1}}{2} + (k+1) B_0 B_1 B_k + \dots \quad (3.14)$$

trong đó các dấu chấm biểu thị các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k$.

Ta suy ra từ (3.12) rằng

$$\frac{\varphi_4^{(k+2)}(0)}{(k+1)(k+2)} - b_{11} \frac{\varphi_3^{(k+1)}(0)}{k+1} = \\ = \left(\frac{B_0 B_1 B_1 B_k}{2} + \frac{B_0 B_0 B_2 B_k}{4} - b_{11} B_0 B_1 B_k \right) + \dots \quad (3.15)$$

trong đó các dấu chấm biểu thị các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k$.

Đặt

$$L_{B_0,B_1,B_2}(M) = \left(\sigma_1(M), B_0 M, \frac{B_0 B_0 M}{2}, \frac{B_0 B_1 B_1 M}{2} + \frac{B_0 B_0 B_2 M}{4} - b_{11} B_0 B_1 B_k \right).$$

Ta chứng minh rằng, với $k \geq 2$, ta có thể tìm thấy B_k thỏa mãn các phương trình (3.4) sao cho B_k có dạng

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

với $k \geq 3$.

Để làm điều này, ta phải tìm B_2 sao cho hạng của hạn chế của ánh xạ L_{B_0,B_1,B_2} lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\}$$

bằng 4. Do hệ số của tọa độ thứ tư của $L_{B_0,B_1,B_2}(M)$, trong đó

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix},$$

đối với m_{41} bằng $-\dfrac{b_{12}^{(2)}}{2}$, nên hạng của hạn chế này bằng 4 khi và chỉ khi $b_{12}^{(2)} \neq 0$.

Ta liệt kê bốn phương trình liên quan tới B_2

$$\varphi_1''(0) = \sigma_1(B_2), \tag{3.16}$$

$$\varphi_2''(0) = B_0B_2 + 2\sigma_2(B_1), \tag{3.17}$$

$$\varphi_3''(0) = \frac{B_0B_0B_2}{2} + B_0B_1B_1, \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_4^{(4)}(0)}{3.4} - b_{11}\frac{\varphi_3'''(0)}{3} &= \\ = \frac{B_0B_1B_1B_2}{2} + \frac{B_0B_0B_2B_2}{8} &- b_{11}B_0B_1B_2. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Nếu ta cố định các giá trị $b_{ij}^{(2)}$ với $(i,j) \notin \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$ trong đó $b_{12}^{(2)} \neq 0$, thì bốn phương trình (3.16)-(3.19) trở thành một hệ Cramer bốn phương trình tuyến tính theo $b_{41}^{(2)}$, $b_{42}^{(2)}$, $b_{43}^{(2)}$ và $b_{44}^{(2)}$. Do đó, chúng cho ta B_2 với $b_{12}^{(2)} \neq 0$.

Với B_2 cố định này, các phương trình (3.4) tương đương với dãy các hệ phương trình mà có vế trái

$$\left\{ \varphi_1^{(k)}(0), \varphi_2^{(k)}(0), \varphi_3^{(k)}, \frac{\varphi_4^{(k+2)}(0)}{(k+1)(k+2)} - b_{11}\frac{\varphi_3^{(k+1)}(0)}{k+1} \right\}_{k\geq 2}.$$

Các hệ phương trình sau là các hệ bốn phương trình tuyến tính theo

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

và có hạng 4, do đó chúng giải được.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng các ma trận B_k mà chúng ta đã tìm thấy tạo thành một ánh xạ chỉnh hình Φ quanh $\zeta = 0$. Để làm điều này, ta cần phải ước lượng

$$\sqrt[k]{\left\| \frac{B_k}{k!} \right\|}.$$

Đầu tiên ta viết

$$\begin{bmatrix} \varphi_1^{(k)}(0) \\ \varphi_2^{(k)}(0) \\ \varphi_3^{(k)}(0) \\ \dfrac{\varphi_4^{(k+2)}(0)}{(k+1)(k+2)} - b_{11}\dfrac{\varphi_3^{(k+1)}(0)}{k+1} \end{bmatrix} = L_{B_0,B_1,B_2}(B_k) + \alpha(B_0, B_1, \ldots, B_{k-1}) \text{ với } k \geq 3$$

trong đó $\alpha(B_0, B_1, \ldots, B_{k-1})$ là một biểu thức phụ thuộc vào B_0, B_1, ... và B_{k-1}.

Hai là, ta làm rõ $\alpha(B_0, B_1, \ldots, B_{k-1})$. Ví dụ, ký hiệu $\alpha_3(B_0, B_1, \ldots, B_{k-1})$ là tọa độ thứ ba của $\alpha(B_0, B_1, \ldots, B_{k-1})$. Ta sẽ làm rõ hạng tử này. Ta có

$$\begin{aligned} \alpha_3(B_0, B_1, \ldots, B_{k-1}) =& \varphi_3^{(k)}(0) - \frac{B_0 B_0 B_k}{2} \\ =& \frac{1}{3!} \sum_{\substack{j_1+j_2+j_3=k \\ j_i \geq 0}} \frac{k!}{j_1! j_2! \ldots j_m!} B_{j_1} B_{j_2} B_{j_3} - \frac{B_0 B_0 B_k}{2}. \end{aligned}$$

Do B_k là ma trận có đúng một dòng khác 0 với $k \geq 3$, nên mọi hạng tử có dạng $B_i B_j B_k$ với $j, k \geq 3$ đều bằng 0. Do đó

$$\begin{aligned} \alpha_3(B_0, B_1, \ldots, B_{k-1}) =& \varphi_3^{(k)}(0) - \frac{B_0 B_0 B_k}{2} \\ =& \frac{B_0 B_0 B_k}{2} + k! B_0 B_1 \frac{B_{k-1}}{(k-1)!} + k! B_0 \frac{B_2}{2!} \frac{B_{k-2}}{(k-2)!} \\ &+ \frac{k!}{2} B_1 B_1 \frac{B_{k-2}}{(k-2)!} + k! B_1 \frac{B_2}{2!} \frac{B_{k-3}}{(k-3)!} + \frac{k!}{2} \frac{B_2}{2!} \frac{B_2}{2!} \frac{B_{k-4}}{(k-4)!} - \frac{B_0 B_0 B_k}{2} \\ =& k! \left(U_0 U_1 U_{k-1} + U_0 U_2 U_{k-2} + \frac{1}{2} U_1 U_1 U_{k-2} + U_1 U_2 U_{k-3} + \frac{1}{2} U_2 U_2 U_{k-4} \right) \end{aligned}$$

trong đó $U_j = \frac{B_j}{j!}$.

Vì thế

$$\frac{\alpha_3(B_0, B_1, \ldots, B_{k-1})}{k!} = U_0 U_1 U_{k-1} + U_0 U_2 U_{k-2} + \frac{1}{2} U_1 U_1 U_{k-2} + U_1 U_2 U_{k-3} + \frac{1}{2} U_2 U_2 U_{k-4}.$$

Nhắc lại rằng ta có thể coi $U_k \in \mathbb{C}^4$ với $k \geq 3$. Giải phương trình (3.20) theo U_k, ta nhận được

$$\frac{1}{2}U_0U_0U_k = \frac{\varphi_3^{(k)}(0)}{k!} - \left(U_0U_1U_{k-1} + U_0U_2U_{k-2} + \frac{1}{2}U_1U_1U_{k-2} + U_1U_2U_{k-3} + \frac{1}{2}U_2U_2U_{k-4}\right).$$

Ta lập luận tương tự đối với các tọa độ khác của $L_{B_0,B_1,B_2}(B_k)$, khi đó ta nhận được

$$L_{B_0,B_1,B_2}(U_k) = \begin{bmatrix} \dfrac{\varphi_1^{(k)}(0)}{k!} \\ \dfrac{\varphi_2^{(k)}(0)}{k!} \\ \dfrac{\varphi_3^{(k)}(0)}{k!} \\ \dfrac{\varphi_4^{(k+2)}(0)}{(k+2)!} - b_{11}\dfrac{\varphi_3^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} \end{bmatrix} + \Lambda_1(U_{k-1}) + \Lambda_2(U_{k-2}) + \ldots + \Lambda_6(U_{k-6})$$

trong đó Λ_i là các ánh xạ tuyến tính cố định từ $\mathbb{C}^4$ vào $\mathbb{C}^4$.

Do hạng của hạn chế của L_{B_0,B_1,B_2} lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\}$$

bằng 4, ta có thể coi L_{B_0,B_1,B_2} là một đẳng cấu tuyến tính của $\mathbb{C}^4$. Suy ra

$$U_k = L^{-1}_{B_0,B_1,B_2}\left(\begin{bmatrix} \frac{\varphi_1^{(k)}(0)}{k!} \\ \frac{\varphi_2^{(k)}(0)}{k!} \\ \frac{\varphi_3^{(k)}(0)}{k!} \\ \dfrac{\varphi_4^{(k+2)}(0)}{(k+2)!} - b_{11}\dfrac{\varphi_3^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} \end{bmatrix} + \Lambda_1(U_{k-1}) + \Lambda_2(U_{k-2}) + \ldots + \Lambda_6(U_{k-6})\right).$$

Do φ chỉnh hình trong đĩa đơn vị,

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left\| \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \right\|} \leq 1.$$

Điều này có nghĩa là tồn tại một hằng số dương C sao cho

$$\left\| \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \right\| \leq C^k$$

với mọi k.

Ta cần phải chứng minh $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|U_k\|}$ là hữu hạn. Điều này sẽ được thực hiện bằng quy nạp theo k. Ta phải tìm một hằng số dương M sao cho $\|U_k\| \leq M^k$ với mọi k. Giả sử ta có một hằng số M sao cho $\|U_l\| \leq M^l$ với $l \leq k-1$. Khi đó, theo quan hệ hồi quy, ta thấy rằng

$$\|U_k\| \leq D\left[C^{k+2} + E\left(M^{k-1} + \ldots + M^{k-6}\right)\right]$$

trong đó D và E là các hằng số phụ thuộc vào các chuẩn của Λ_i và L_{B_0,B_1,B_2}.

Do đó nếu ta chọn M đủ lớn thì ta sẽ có ngay lập tức

$$\|U_k\| \leq M^k,$$

điều này chứng minh rằng các ma trận B_k thực sự tạo thành một hàm chỉnh hình quanh $\zeta = 0$, hay một ánh xạ nâng địa phương của φ. Ta kết thúc chứng minh Định lý 3.7.

3.7.2 Trường hợp $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 4$

Định lý 3.8. *Giả sử* $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 4$. *Dữ liệu* $\{\varphi, B_0, B_1\}$ *nâng được địa phương khi và chỉ khi các điều kiện sau được thỏa mãn*

(i) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$,

(ii) $\varphi_1'(0) = \sigma_1(B_1)$, $\varphi_2'(0) = B_0B_1$, $\varphi_3'(0) = \dfrac{B_0B_0B_1}{2}$,

(iii) $\varphi_4'(0) = 0$, $\varphi_4''(0) = \dfrac{B_0B_0B_1B_1}{2} = 0$.

Ta nhận xét rằng các điều kiện được phát biểu ở trên được thỏa mãn một cách hiển nhiên. Chúng bao gồm $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \mathrm{D}\pi_{B_0}(B_1)$ và một điều kiện phụ về $\varphi_4''(0)$ nhờ tính toán trực tiếp.

Chứng minh Định lý 3.8 Công việc còn lại là chứng minh các điều kiện này là đủ. Chúng ta có ba trường hợp con: b_{12} hoặc b_{41} hoặc b_{42} khác 0(xem trang 64).

Nếu $b_{12} \neq 0$, ta có thể tìm được B_k có dạng

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

với $k \geq 2$ thỏa mãn các phương trình của φ (3.4). Sự hội tụ của nghiệm được chứng minh giống như trong chứng minh trước.

Nếu $b_{41} \neq 0$, ta có thể tìm được B_k có dạng

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

với $k \geq 2$ thỏa mãn các phương trình (3.4).

Bây giờ ta xét trường hợp con mà $b_{42} \neq 0$ và $b_{41} = b_{12} = 0$. Trong tình huống này, kể cả có $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 4$, không có gì đảm bảo rằng hạng của hạn chế của ánh xạ đó lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\}$$

bằng 4, do đó ta cần phải thay thế ánh xạ đó bằng ánh xạ mới L_{B_0,B_1,B_2} có hạn chế lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\}$$

đạt hạng cực đại sao cho ta có thể tìm được một nghiệm hội tụ $\{B_k\}_{k\geq 1}$. Để làm điều đó, ta cần xét $\varphi_4^{(k+2)}(0)$ thay vì $\varphi_4^{(k+1)}(0)$. Ta có

$$\begin{aligned} \varphi_4^{(k+4)}(0) = (k+2)\frac{B_0B_0B_1B_{k+1}}{2} \\ + (k+1)(k+2)\left(\frac{B_0B_1B_1B_k}{2} + \frac{B_0B_0B_2B_k}{4}\right) + \dots \end{aligned} \tag{3.20}$$

trong đó các dấu chấm biểu thị các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k$.

Giả sử

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

với $k \geq 3$. Khi đó

$$B_0B_0B_1B_{k+1} = b_{11}B_0B_0B_{k+1} \text{ với } k \geq 2.$$

Do

$$\varphi_3^{(k+1)}(0) = \frac{B_0B_0B_{k+1}}{2} + (k+1)B_0B_1B_k + \dots \quad (3.21)$$

trong đó các dấu chấm biểu thị các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k$.

Suy ra

$$\frac{\varphi_4^{(k+2)}(0)}{(k+1)(k+2)} - b_{11}\frac{\varphi_3^{(k+1)}(0)}{k+1} = \\ = \left(\frac{B_0B_1B_1B_k}{2} + \frac{B_0B_0B_2B_k}{4} - b_{11}B_0B_1B_k\right) + \dots \quad (3.22)$$

trong đó các dấu chấm biểu thị các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k$.

Do đó ánh xạ mới L_{B_0,B_1,B_2} giống ánh xạ trong chuwgns minh của trường hợp $\text{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$. Nhưng sự khác biệt trong tình huống này là chúng ta có thêm một phương trình theo B_2, tức là ta có năm phương trình liên quan tới B_2. Đó là

$$\varphi_1''(0) = \sigma_1(B_2), \quad (3.23)$$

$$\varphi_2''(0) = B_0B_2 + 2\sigma_2(B_1), \quad (3.24)$$

$$\varphi_3''(0) = \frac{B_0B_0B_2}{2} + B_0B_1B_1, \quad (3.25)$$

$$\frac{\varphi_4'''(0)}{3} = \frac{B_0B_0B_1B_2}{2} + \frac{B_0B_1B_1B_1}{3} \quad (3.26)$$

$$\frac{\varphi_4^{(4)}(0)}{3.4} - b_{11}\frac{\varphi_3'''(0)}{3} = \\ = \frac{B_0B_1B_1B_2}{2} + \frac{B_0B_0B_2B_2}{8} - b_{11}B_0B_1B_2. \quad (3.27)$$

Như trong chứng minh trước, ta cố định các giá trị của $b_{ij}^{(2)}$ với $(i,j) \notin \{(1,1),(4,1),(4,2),\ (4,3),(4,4)\}$ sao cho năm phương trình trở thành một hệ Cramer năm phương trình tuyến tính theo $b_{11}^{(2)}$, $b_{41}^{(2)}$, $b_{42}^{(2)}$, $b_{43}^{(2)}$ và $b_{44}^{(2)}$. Sự thoải mái của việc chọn này đảm bảo rằng hạng của hạn chế của L_{B_0,B_1,B_2} lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\}$$

bằng 4. Ta kết thúc chứng minh Định lý 3.8.

3.8 Trường hợp thứ hai của B_0

Do

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

nên các số liên kết là $d_1 = d_2 = 1$ và $d_3 = d_4 = 2$.

Ánh xạ tuyến tính liên kết của ta là

$$L_{B_0,B_1}(M) = \left(\sigma_1(M), B_0M, B_0B_1M, \frac{B_0B_0B_1M}{2}\right)$$

với $M \in \mathbb{C}^{4,4}$. Ta có các bảng sau.

Bảng 3.3: Bảng hệ số cho ánh xạ tuyến tính liên kết

	$\sigma_1(M)$	B_0M	B_0B_1M	$\frac{B_0B_0B_1M}{2}$
m_{11}	1		$-b_{43}$	
m_{12}				
m_{13}			b_{41}	
m_{14}				
m_{21}		-1	$-(b_{33}+b_{44})$	b_{43}
m_{22}	1		$-b_{43}$	
m_{23}			$b_{31}+b_{42}$	$-b_{41}$

Tiếp theo ở trang bên

Bảng 3.3 – tiếp tục từ trang trước

	$\sigma_1(M)$	B_0M	B_0B_1M	$\frac{B_0B_0B_1M}{2}$
m_{24}			b_{41}	
m_{31}			b_{23}	
m_{32}				
m_{33}	1		$-b_{21}$	
m_{34}				
m_{41}			$b_{13}+b_{24}$	$-b_{23}$
m_{42}			b_{23}	
m_{43}		-1	$-(b_{11}+b_{22})$	b_{21}
m_{44}	1		$-b_{21}$	

Bảng 3.4: Các thông tin hữu ích về B_0 và đạo hàm thứ nhất của φ tại $\zeta = 0$

$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$	$d_1 = d_2 = 1; d_3 = d_4 = 2$

Giao hoán tử $[B_0, M] = \begin{bmatrix} m_{21} & m_{22}-m_{11} & m_{23} & m_{24}-m_{13} \\ 0 & -m_{21} & 0 & -m_{23} \\ m_{41} & m_{42}-m_{31} & m_{43} & m_{44}-m_{33} \\ 0 & -m_{41} & 0 & -m_{43} \end{bmatrix}$			
Theo dòng trên, ta có thể giả sử $B_1 = \begin{bmatrix} * & 0 & * & 0 \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$			
$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$			
$\varphi_1'(0)$	$=$	$\sigma_1(B_1)$	
$\varphi_2'(0)$	$=$	B_0B_1	
$\varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0$			
$\varphi_3''(0)$	$=$	$B_0B_1B_1$	
$\varphi_4''(0)$	$=$	$B_0B_0B_1B_1$	
$\varphi_1''(0)$	$=$	$\sigma_1(B_2)$	
$\varphi_2''(0)$	$=$	$B_0B_2 + 2\sigma_2(B_1)$	
$\dfrac{\varphi_3'''(0)}{3}$	$=$	$B_0B_1B_2 + 2\sigma_3(B_1)$	
$\dfrac{\varphi_4'''(0)}{3}$	$=$	$\dfrac{B_0B_0B_1B_2}{2} + \dfrac{B_0B_1B_1B_1}{3}$	

Giống như trường hợp thứ nhất của B_0, ta có thể xử lý bài toán theo

hạng của L_{B_0,B_1}. Trong trường hợp này, hạng của L_{B_0,B_1} có thể nhận giá trị trong $\{2,3,4\}$.

3.8.1 Trường hợp $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 2$

Quan sát Bảng 3.3, ta suy ra rằng hạng của L_{B_0,B_1} bằng 2 khi và chỉ khi các điều kiện sau đồng thời được thỏa mãn

(i) $b_{41} = b_{23} = 0$,

(ii) $b_{43} = b_{21} = 0$,

(iii) $b_{11} + b_{22} = b_{33} + b_{44}$,

(iv) $b_{31} + b_{42} = b_{13} + b_{24} = 0$.

Đặt $b_{11} + b_{22} = b_{33} + b_{44} = \alpha$. Suy ra với $M = (m_{ij}) \in \mathbb{C}^{4,4}$, ta có

$$B_0B_1M = -\alpha m_{21} - \alpha m_{43} = \alpha B_0 M.$$

Nếu φ nâng được địa phương, thì ta sẽ có

$$\frac{\varphi_3'''(0)}{3} = B_0B_1B_2 + 2\sigma_3(B_1), \tag{3.28}$$

$$\varphi_2''(0) = B_0B_2 + 2\sigma_2(B_1). \tag{3.29}$$

Do đó

$$\frac{\varphi_3'''(0)}{3} - 2\sigma_3(B_1) = \alpha\left[\varphi_2''(0) - 2\sigma_2(B_1)\right].$$

Thêm nữa, do $b_{41} = b_{23} = b_{43} = b_{21} = 0$, nên ta có $B_0B_0B_1M = 0$ với mọi $M \in \mathbb{C}^{4,4}$. Ta suy ra

$$\varphi_4'''(0) = B_0B_1B_1B_1.$$

Bây giờ ta có thể phát biểu kết quả.

Định lý 3.9. *Giả sử* $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 2$. *Dữ liệu* $\{\varphi, B_0, B_1\}$ *nâng được địa phương khi và chỉ các điều sau được thỏa mãn*

(i) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$,

(ii) $\varphi_1'(0) = \sigma_1(B_1)$, $\varphi_2'(0) = B_0B_1$,

(iii) $\varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0$,

(iv) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$,

(v) $\varphi_4''(0) = \frac{B_0B_0B_1B_1}{2} = 2\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix} = 0$,

(vi) $\varphi_4'''(0) = B_0B_1B_1B_1$,

(vii) $\frac{\varphi_3'''(0)}{3} - \alpha\varphi_2''(0) = 2\sigma_3(B_1) - 2\alpha\sigma_2(B_1)$.

Chứng minh Định lý 3.9 Các điều kiện cần được chứng minh ngay trước phát biểu của định lý. Bây giờ ta sẽ chứng minh chúng là đủ.

Ta sẽ xây dựng một ánh xạ nâng địa phương Φ mà $\Phi^{(k)}(0) = B_k$ có dạng

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

với $k \geq 3$, và ta sẽ thay thế L_{B_0,B_1} bởi L_{B_0,B_1,B_2} sao cho hạn chế của L_{B_0,B_1,B_2} lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\}$$

có hạng cực đại.

Với $k \geq 3$, ta có

$$\varphi_2^{(k+1)}(0) = B_0B_{k+1} + (k+1)B_1B_k + \dots, \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3^{(k+2)}(0) =& (k+2)B_0B_1B_{k+1} \\ &+ (k+1)(k+2)\left(\frac{B_0B_2B_k}{2} + \frac{B_1B_1B_k}{2}\right) + \dots, \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\varphi_4^{(k+2)}(0) = (k+1)(k+2)\left(\frac{B_0B_0B_2B_k}{4} + \frac{B_0B_1B_1B_k}{2}\right) + \dots \tag{3.32}$$

trong đó các dấu chấm biểu thị các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k$.

Ta nhận được

$$\frac{\varphi_3^{(k+2)}(0)}{(k+1)(k+2)} - \alpha\frac{\varphi_2^{(k+1)}(0)}{k+1} = \left(\frac{B_0B_2B_k}{2} + \frac{B_1B_1B_k}{2} - \alpha B_1B_k\right) + \dots \tag{3.33}$$

Ánh xạ mới L_{B_0,B_1,B_2} sẽ được nhận từ các phương trình trong (3.4) với các vế trái

$$\left\{\varphi_1^{(k)}(0), \varphi_2^{(k)}(0), \frac{\varphi_3^{(k+2)}(0)}{(k+1)(k+2)} - \alpha\frac{\varphi_2^{(k+1)}(0)}{k+1}, \frac{\varphi_4^{(k+2)}(0)}{(k+1)(k+2)}\right\}.$$

Cụ thể là

$$L_{B_0,B_1,B_2}(M) = \left(\sigma_1(M), B_0M, \frac{B_0B_2M}{2} + \frac{B_1B_1M}{2} - \alpha B_1M, \frac{B_0B_0B_2M}{4} + \frac{B_0B_1B_1M}{2}\right).$$

Nhắc lại rằng ta cần phải tìm thấy B_2 sao cho hạng của hạn chế của L_{B_0,B_1,B_2} lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}\right\}$$

bằng 4, để B_k có dạng

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Ta liệt kê bốn phương trình liên quan tới B_2.

$$\varphi_1''(0) = \sigma_1(B_2), \tag{3.34}$$

$$\varphi_2''(0) = B_0B_2 + 2\sigma_2(B_1), \tag{3.35}$$

$$\frac{\varphi_3^{(4)}(0)}{12} - \alpha\frac{\varphi_2'''(0)}{3} = \frac{B_0B_2B_2}{4} + \frac{B_1B_1B_2}{2} - \alpha B_1B_2, \tag{3.36}$$

$$\frac{\varphi_4^{(4)}(0)}{12} = \frac{B_0B_0B_2B_2}{8} + \frac{B_0B_1B_1B_2}{2}. \tag{3.37}$$

Để tìm được B_2 thỏa mãn bốn phương trình trên, ta cố định các giá trị của $b_{ij}^{(2)}$ với $(i,j) \notin \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$ sao cho bốn phương trình trên trở thành một hệ Cramer bốn phương trình tuyến tính theo $b_{41}^{(2)}$, $b_{42}^{(2)}$, $b_{43}^{(2)}$ và $b_{44}^{(2)}$. Sự thoải mái trong lựa chọn của $b_{23}^{(2)}$, $b_{13}^{(2)}$ và $b_{24}^{(2)}$ đảm bảo rằng hạn chế của L_{B_0,B_1,B_2} lên $\mathbb{C}^4$ có hạng cực đại.

3.8.2 Trường hợp $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$

Hạng của L_{B_0,B_1} bằng 3 nếu những điều sau xảy ra đồng thời

(i) $b_{23} = b_{41} = 0$,

(ii) $b_{21} = b_{43}$,

(iii) $b_{11}+b_{22} \neq b_{33}+b_{44}$ hoặc $b_{31}+b_{42} \neq 0$ hoặc $b_{13}+b_{24} \neq 0$ hoặc $b_{21} = b_{43} \neq 0$ (tương ứng với bốn trường hợp con).

Đặt $b_{21} = b_{43} = \kappa$. Trong trường hợp này, ta có thể phát biểu kết quả như sau.

Định lý 3.10. *Giả sử* $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$. *Dữ liệu* $\{\varphi, B_0, B_1\}$ *nâng được địa phương khi và chỉ khi*

(i) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$,

(ii) $\varphi_1'(0) = \sigma_1(B_1)$, $\varphi_2'(0) = B_0B_1$,

(iii) $\varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0$,

(iv) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$,

(v) $\varphi_4''(0) = \frac{B_0B_0B_1B_1}{2} = 2\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix}$,

(vi) $\varphi_4'''(0) + 3\kappa\varphi_2''(0) = B_0B_1B_1B_1 + 6\kappa\sigma_2(B_1)$.

Chứng minh Định lý 3.10 Các điều kiện cần được chứng minh theo cách tương tự như trong chứng minh trước. Do $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$ nên ta cần phải thay ánh xạ này bởi ánh xạ mới L_{B_0,B_1,B_2}, cái sẽ được nhận từ các phương trình với vế trái $\varphi_1^{(k)}(0)$, $\varphi_2^{(k)}(0)$, $\varphi_3^{(k+2)}(0)$ và $\varphi_4^{(k+2)}(0)$.

Nhắc lại rằng với $M \in \mathbb{C}^{4,4}$,

$$\frac{B_0B_0B_1M}{2} = -\kappa B_0M.$$

Ta làm rõ các phương trình.

$$\begin{aligned}
\varphi_4^{(k+2)}(0) =& (k+2)\frac{B_0B_0B_1B_{k+1}}{2} \\
&+ (k+1)(k+2)\left(\frac{B_0B_0B_2B_k}{4} + \frac{B_0B_1B_1B_k}{2}\right) + \dots \\
\varphi_2^{(k+1)} =& B_0B_{k+1} + (k+1)B_1B_k + \dots
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{\varphi_4^{(k+2)}(0)}{(k+1)(k+2)} + \kappa\frac{\varphi_2^{(k+1)}(0)}{k+1} = \\ = \left(\frac{B_0B_0B_2B_k}{4} + \frac{B_0B_1B_1B_k}{2} + \kappa B_1B_k\right) + \dots \quad (3.38)$$

Hạng tử tuyến tính theo B_k trong ngoặc trên là tọa độ thứ tư của $L_{B_0,B_1,B_2}(B_k)$. Tọa độ thứ ba sẽ tới từ $\varphi_3^{(k+2)}(0)$.

Nhưng đầu tiên, ta giả sử $b_{13} + b_{24} \neq 0$. Khi đó ta khẳng định có thể tìm được một ánh xạ nâng Φ mà B_k có dạng

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

với $k \geq 3$.

Để làm điều này, ta tính $\varphi_3^{(k+2)}(0)$.

$$\varphi_3^{(k+2)}(0) = (k+2)B_0B_1B_{k+1} + (k+1)(k+2)\left(\frac{B_0B_2B_k}{2} + \frac{B_1B_1B_k}{2}\right) + \dots \quad (3.39)$$

Do có một hạng tử gắn với B_{k+1}, ta cần phải triệt tiêu hạng tử này bằng tổ hợp tuyến tính với các đạo hàm khác của φ, ví dụ $\varphi_4^{(k+3)}(0)$ (với giả sử $b_{23}^{(2)} \neq 0$), $\varphi_2^{(k+1)}(0)$ và $\varphi_1^{(k+1)}(0)$. Khi đó phần tuyến tính theo B_k sẽ là tọa độ thứ ba của $L_{B_0,B_1,B_2}(B_k)$.

Việc còn lại là liệt kê và giải 5 phương trình liên quan tới B_2. Ba phương trình thứ nhất tương ứng với ba tọa độ thứ nhất của L_{B_0,B_1}.

$$\varphi_1''(0) = \sigma_1(B_2) = b_{11}^{(2)} + b_{22}^{(2)} + b_{33}^{(2)} + b_{44}^{(2)}, \quad (3.40)$$

$$\varphi_2''(0) = B_0B_2 + 2\sigma_2(B_1) = -b_{21}^{(2)} - b_{43}^{(2)} + 2\sigma_2(B_1), \quad (3.41)$$

$$\frac{\varphi_3'''(0)}{3} = B_0B_1B_2 + 2\sigma_3(B_1). \quad (3.42)$$

Hai phương trình cuối là hai phương trình bậc hai mà hạng tử bậc hai tương ứng là $B_0B_2B_2$ và $B_0B_0B_2B_2 = 4\begin{vmatrix} b_{21}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{41}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix}$.

Nhận xét rằng ba phương trình thứ nhất là tuyến tính theo B_2, do đó, việc giải chúng dẫn tới một vài $b_{ij}^{(2)}$ là biến tự do và một vài biến khác là biến phụ thuộc vào các biến tự do trong đó có $b_{23}^{(2)}$, đây là sự kiện quan trọng. Ta giải thích lý do. Dạng của ánh xạ mới L_{B_0,B_1,B_2} là như sau

$$L_{B_0,B_1,B_2}(M) = \left(\sigma_1(M), B_0M, B_0B_2M + \alpha(M), \frac{B_0B_0B_2M}{2} + \beta(M)\right)$$

trong đó $\alpha(M)$ và $\beta(M)$ là các dạng tuyến tính theo $M \in \mathbb{C}^{4,4}$ mà hệ số chỉ phụ thuộc vào B_1. Sự tự do của $b_{23}^{(2)}$ cho phép ta đảm bảo rằng hạng của hạn chế của L_{B_0,B_1,B_2} đạt cực đại.

Do đó không khó để thấy rằng tồn tại B_2 sao cho có thể tìm được B_k có dạng

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

với $k \geq 3$, và điều này cho ta một ánh xạ nâng địa phương Φ cho dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$.

Điều này kết thúc chứng minh định lý dưới giả sử $b_{13} + b_{24} \neq 0$. Trong các trường hợp con khác, lý luận là tương tự.

3.8.3 Trường hợp $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 4$

Hạng của L_{B_0,B_1} bằng 4 khi và chỉ khi $b_{23} \neq 0$ hoặc $b_{41} \neq 0$ hoặc $b_{21} \neq b_{43}$. Ta phát biểu kết quả.

Định lý 3.11. *Giả sử* $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 4$. *Dữ liệu* $\{\varphi, B_0, B_1\}$ *nâng được địa phương khi và chỉ khi*

(i) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$,

(ii) $\varphi_1'(0) = \sigma_1(B_1)$, $\varphi_2'(0) = B_0B_1$,

(iii) $\varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0$,

(iv) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$,

(v) $\varphi_4''(0) = \frac{B_0B_0B_1B_1}{2} = 2\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix}$.

Chứng minh Định lý 3.11 Nếu $b_{23} \neq 0$ thì hạn chế của L_{B_0,B_1} lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\}$$

có hạng cực đại, do đó ta có thể tìm được B_k có dạng

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

với $k \geq 2$ mà thỏa mãn các phương trình của φ (3.4). Điều này cho ta nâng địa phương Φ.

Nếu $b_{41} \neq 0$ thì hạn chế của L_{B_0,B_1} lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

có hạng cực đại, vì thế ta có thể tìm được B_k có dạng

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

với $k \geq 2$ thỏa mãn các phương trình của φ (3.4). Điều này cho ta nâng địa phương Φ.

Nếu $b_{23} = b_{41} = 0$ và $b_{21} \neq b_{43}$ thì ta có thể sử dụng các lý luận tương tự như trong chứng minh trường hợp $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 2$ hay 3.

3.9 Trường hợp thứ ba B_0

Bảng 3.5: Bảng hệ số cho ánh xạ tuyến tính liên kết

	$\sigma_1(M)$	B_0M	B_0B_1M	$\dfrac{B_0B_1B_1M}{2}$
m_{11}	1		$-b_{43}$	$-\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{42} & b_{43} \end{vmatrix}$
m_{12}				$\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix}$
m_{13}			b_{41}	$-\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix}$
m_{14}				
m_{21}				$\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{42} & b_{43} \end{vmatrix}$
m_{22}	1		$-b_{43}$	$-\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix}$
m_{23}			b_{42}	$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix}$
m_{24}				
m_{31}				
m_{32}				
m_{33}	1			
m_{34}				
m_{41}			b_{13}	$-\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}$

Tiếp theo ở trang sau

Bảng 3.5 – tiếp tục từ trang trước

	$\sigma_1(M)$	B_0M	B_0B_1M	$\dfrac{B_0B_1B_1M}{2}$
m_{42}			b_{23}	$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix}$
m_{43}		-1	$-(b_{11}+b_{22})$	$-\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$
m_{44}	1			

Bảng 3.6: Các thông tin hữu ích về B_0 và đạo hàm thứ nhất của φ tại $\zeta = 0$

$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$	$d_1 = d_2 = 1; d_3 = 2; d_4 = 3$
$[B_0, M] = B_0M - MB_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -m_{13} \\ 0 & 0 & 0 & -m_{23} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} - m_{33} \\ 0 & 0 & 0 & -m_{43} \end{bmatrix}$	
Theo dòng trên, ta có thể giả sử $B_1 = \begin{bmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$	
$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$	
$\varphi_1'(0) \quad = \quad \sigma_1(B_1)$	
$\varphi_2'(0) \quad = \quad B_0B_1$	

$\varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0$		
$\varphi_3''(0)$	$=$	$B_0B_1B_1$
$\varphi_4''(0)$	$=$	0
$\varphi_1''(0)$	$=$	$\sigma_1(B_2)$
$\varphi_2''(0)$	$=$	$B_0B_2 + 2\sigma_2(B_1)$
$\dfrac{\varphi_3'''(0)}{3}$	$=$	$B_0B_1B_2 + 2\sigma_3(B_1)$
$\dfrac{\varphi_4^{(4)}(0)}{12}$	$=$	$\dfrac{B_0B_1B_1B_2}{2} + 2\sigma_4(B_1)$

3.9.1 Trường hợp $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 2$

Đặt $\begin{array}{rcl} L_{B_0,B_1}: \quad \mathbb{C}^{4,4} & \to & \mathbb{C}^4 \\ M & \mapsto & \left(\sigma_1(M), B_0M, B_0B_1M, \dfrac{B_0B_1B_1M}{2}\right) \end{array}$.

Nhìn vào Bảng 3.5 các hệ số của L_{B_0,B_1}, ta thấy rằng $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 2$ tương đương với việc $b_{43} = b_{41} = b_{42} = b_{13} = b_{23} = 0$. Trong trường hợp này,

$$B_0B_1M = (b_{11} + b_{22})B_0M, \tag{3.43}$$

$$\frac{B_0B_1B_1M}{2} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} B_0M, \tag{3.44}$$

$$B_0B_0M = B_0B_0B_0M = B_0B_0MN = 0, \tag{3.45}$$

với mọi $M, N \in \mathbb{C}^{4,4}$.

Định lý 3.12. *Trong trường hợp* $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 2$ *và* $\{b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}\} \neq \{0\}$ *dữ liệu* $\{\varphi, B_0, B_1\}$ *nâng được địa phương khi và chỉ khi*

(i) $\varphi(0) = \pi(B_0) = (0, 0, 0, 0)$,

(ii) $\varphi'(0) = (\sigma_1(B_1), B_0B_1, 0, 0) = (\sigma_1(B_1), -b_{43}, 0, 0)$,

(iii) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$,

(iv) $\varphi_4''(0) = 0$,

(v) $\underbrace{\dfrac{\varphi_3'''(0)}{3} - 2\sigma_3(B_1)}_{=B_0B_1B_2} = (b_{11} + b_{22})\Big(\underbrace{\varphi_2''(0) - 2\sigma_2(B_1)}_{B_0B_2}\Big)$

(vi) $\underbrace{\dfrac{\varphi_4^{(4)}(0)}{12} - 2\sigma_4(B_1)}_{=\frac{B_0B_1B_1B_2}{2}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \Big(\underbrace{\varphi_2''(0) - 2\sigma_2(B_1)}_{=B_0B_2}\Big)$.

Định lý 3.13. *Trong trường hợp* $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 2$ *và* $\{b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}\} = \{0\}$ *dữ liệu* $\{\varphi, B_0, B_1\}$ *nâng được địa phương khi và chỉ khi*

(i) $\varphi(0) = \pi(B_0) = (0, 0, 0, 0)$,

(ii) $\varphi'(0) = (\sigma_1(B_1), B_0B_1, 0, 0) = (\sigma_1(B_1), -b_{43}, 0, 0)$,

(iii) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$,

(iv) $\varphi_4''(0) = 0$,

(v) $\dfrac{\varphi_3'''(0)}{3} = \dfrac{\varphi_4^{(4)}(0)}{12} = 0$

(vi) $\varphi_4^{(5)}(0) = 0$.

Chứng minh Định lý 3.12 Giả sử dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương. Bốn điều kiện đầu tiên là hiển nhiên. Các đẳng thức sau giải thích điều kiện thứ năm và sáu:

$$\begin{aligned} B_0B_2 &= -\,b_{43}^{(2)}, \\ B_0B_1B_2 &= -\,(b_{11} + b_{22})b_{43}^{(2)} = (b_{11} + b_{22})B_0B_2, \\ \frac{B_0B_1B_1B_2}{2} &= -\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} b_{43}^{(2)} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} B_0B_2. \end{aligned}$$

Ta chứng minh rằng các điều kiện cũng là đủ. Ta sẽ thay thế ánh xạ tuyến tính liên kết L_{B_0,B_1} bởi ánh xạ mới L_{B_0,B_1,B_2} có hạng 4 sao cho $\varphi^{(k)}(0) = B_k$

luôn là ma trận có duy nhất dòng cuối khác không

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

với $k \geq 3$. Để làm điều này, ta tính các đạo hàm của φ như sau.

$$\begin{aligned}
\varphi_2^{(k+1)}(0) =& B_0 B_{k+1} + (k+1) B_1 B_k + \dots \\
\varphi_3^{(k+2)}(0) =& (k+2) \left[B_0 B_1 B_{k+1} + \frac{k+1}{2} B_1 B_1 B_k + \frac{k+1}{2} B_0 B_2 B_k \right] + \dots \\
\varphi_4^{(k+3)} =& \frac{(k+2)(k+3)}{2} \left[B_0 B_1 B_1 B_{k+1} + \frac{k+1}{3} B_1 B_1 B_1 B_k \right. \\
& \left. + (k+1) B_0 B_1 B_2 B_k \right] + \dots
\end{aligned}$$

trong đó các dấu chấm biểu thị các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k$. Ta suy ra từ (3.43)

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi_3^{(k+2)}(0)}{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} - (b_{11} + b_{22}) \frac{\varphi_2^{(k+1)}(0)}{\frac{k+1}{2}} =& B_1 B_1 B_k + B_0 B_2 B_k \\
& - 2(b_{11} + b_{22}) B_1 B_k + \dots
\end{aligned} \tag{3.46}$$

và từ (3.44)

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi_4^{(k+3)}(0)}{\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3!}} - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \frac{\varphi_2^{(k+1)}(0)}{\frac{k+1}{3!}} =& B_1 B_1 B_1 B_k \\
& + 3 B_0 B_1 B_2 B_k - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} 3! B_1 B_k + \dots
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Do đó, ánh xạ mới L_{B_0,B_1,B_2} cần được tìm có dạng

$$\begin{aligned}
L_{B_0,B_1,B_2}(M) = \Big(& \sigma_1(M), B_0 M, B_1 B_1 M + B_0 B_2 M - 2(b_{11} + b_{22}) B_1 M \,, \\
& B_1 B_1 B_1 M + 3 B_0 B_1 B_2 M - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} 3! B_1 M \Big)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

trong đó B_2 được chọn sao cho hạn chế của L_{B_0,B_1,B_2} lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\}$$

có hạng 4. Với

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix},$$

ta có điều sau

$$\begin{aligned}
B_1B_1M =& 2\left(\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}\right) m_{44}, \\
B_0B_2M =& b_{13}^{(2)} m_{41} + b_{23}^{(2)} m_{42} - (b_{11}^{(2)} + b_{22}^{(2)}) m_{43}, \\
B_1M =& b_{33} m_{44}, \\
B_0B_1B_2M =& -(b_{12}b_{23}^{(2)} - b_{22}b_{13}^{(2)}) m_{41} \\
&+ (b_{11}b_{23}^{(2)} + b_{21}b_{13}^{(2)}) m_{42} - \left(\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}\right) m_{43}.
\end{aligned}$$

Ta suy ra hạng của hạn chế của L_{B_0,B_1,B_2} lên $\mathbb{C}^4$ bằng 4 khi và chỉ khi

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} b_{13}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ -\left(b_{12}b_{23}^{(2)} - b_{22}b_{13}^{(2)}\right) & b_{11}b_{23}^{(2)} - b_{21}b_{13}^{(2)} \end{pmatrix} = 2, \tag{3.49}$$

tức là định thức

$$(b_{11} - b_{22}) b_{13}^{(2)} b_{23}^{(2)} - b_{21}\left(b_{13}^{(2)}\right)^2 + b_{12}\left(b_{23}^{(2)}\right)^2 \neq 0. \tag{3.50}$$

Ta có thể cố định các giá trị của $b_{13}^{(2)}$ và $b_{23}^{(2)}$ sao cho hạng của ma trận (3.49) bằng 2 trừ trường hợp mà $b_{11} = b_{22}$ và $b_{12} = b_{21} = 0$ cái sẽ được giải quyết sau. Tiếp theo, ta cần phải giải các phương trình sau theo B_2.

$$\varphi_1''(0) = \sigma_1(B_2) \tag{3.51}$$

$$\varphi_2''(0) = B_0B_2 + 2\sigma_2(B_1) \tag{3.52}$$

$$\frac{\varphi_3^{(4)}(0)}{4} - (b_{11} + b_{22})\varphi_2'''(0) = \frac{3}{4}B_0B_2B_2 + \frac{3}{2}B_1B_1B_2 \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi_4^{(5)}(0)}{10} - 2\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \varphi_2'''(0) =& B_1B_1B_1B_2 \\
&+ \frac{3}{2}B_0B_1B_2B_2 - 6\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} B_1B_2.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Đầu tiên, ta giải hai phương trình đầu tiên (3.51) và (3.52). Đây là hai phương trình tuyến tính nên việc giải chúng dẫn tới $b_{43}^{(2)}$ và $b_{44}^{(2)}$ được biểu thị như là các hàm của $b_{ij}^{(2)}$ với $(i,j) \neq (4,3),(4,4)$. Tiếp theo, ta nhận xét rằng hai phương trình (3.53) và (3.54) đều có dạng bậc hai trong đó hạng tử bậc hai theoB_2 lần lượt là

$$\frac{B_0B_2B_2}{2} = -\begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{41}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{42}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\frac{B_0B_1B_2B_2}{2} = -\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{41}^{(2)} & b_{42}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{41}^{(2)} & b_{42}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{vmatrix}.$$

Ta giải thích vì sao hai phương này luôn có một nghiệm có các tính chất cần thiết. Giả sử ví dụ $b_{11} \neq 0$. Khi đó ta xét hai hạng tử bậc hai $b_{13}^{(2)}b_{41}^{(2)}$ và $b_{11}b_{42}^{(2)}b_{23}^{(2)}$ trong các phương trình (3.53) và (3.54). Ta cố định các giá trị của $b_{ij}^{(2)}$ với $(i,j) \notin \{((4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$, khi đó bốn phương trình (3.51-3.54) trở thành một hệ Cramer các phương trình tuyến tính cho ta nghiệm B_2 thích hợp.

Bây giờ giả sử

$$b_{11} = b_{22} = \kappa \neq 0 \text{ và } b_{12} = b_{21} = 0,$$

do đó ta không chọn được các giá trị cho $b_{13}^{(2)}, b_{23}^{(2)}$ sao cho định thức trong (3.50) khác 0. Nhắc lại dạng của B_1

$$B_1 = \begin{bmatrix} \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix}.$$

Ta phải chuyển qua $\varphi_4^{(k+4)}(0)$ để cấu tạo tọa độ thứ tư của $L_{B_0,B_1,B_2}(B_k)$ để có sự kiểm soát về hạng của hạn chế của nó lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\}.$$

Ta có

$$\varphi_4^{(k+4)}(0) = \frac{(k+3)(k+4)}{2!}B_0B_1B_1B_{k+2} + \frac{(k+2)(k+3)(k+4)}{2!}B_0B_1B_2B_{k+1} + \frac{(k+2)(k+3)(k+4)}{3!}B_1B_1B_1B_{k+1} + \dots$$

trong đó các dấu chấm biểu thị các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k+1$. Nhắc lại là nếu

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

thì

$$\frac{B_0 B_1 B_1 M}{2} = -\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} m_{43} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} B_0 M.$$

Ta có

$$\varphi_2^{(k+2)}(0) = B_0 B_{k+2} + (k+2) B_1 B_{k+1} + \dots$$

trong đó các dấu chấm biểu thị các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k+1$.

Suy ra

$$\begin{aligned} \varphi_4^{(k+4)}(0) - (k+3)(k+4) \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \varphi_2^{(k+2)}(0) = \\ = \frac{(k+2)(k+3)(k+4)}{3!} \Bigg(3 B_0 B_1 B_2 B_{k+1} + B_1 B_1 B_1 B_{k+1} \\ -3! \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} B_1 B_{k+1} \Bigg) + \dots \end{aligned}$$

trong đó các dấu chấm biểu thị các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k+1$.

Ta muốn triệt tiêu B_{k+1} trong phương trình trên bằng một tổ hợp tuyến tính với $\varphi_1^{(k+1)}(0)$, $\varphi_2^{(k+1)}(0)$ và $\varphi_3^{(k+3)}(0)$. Nhưng hai cái đầu chỉ có thể triệt tiêu các hệ số của $b_{43}^{(k+1)}$ và $b_{44}^{(k+1)}$. Do đó ta cần tính các hệ số của $b_{41}^{(k+1)}$ và $b_{42}^{(k+1)}$ của các dạng tuyến tính này theo B_{k+1}.

Ta có

$$B_1 B_{k+1} = (b_{11} + b_{22} + b_{33}) b_{44}^{(k+1)} = (2\kappa + b_{33}) b_{44}^{(k+1)}$$

và

$$\frac{B_1 B_1 B_1 B_{k+1}}{3} = \begin{vmatrix} \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 \\ b_{41}^{(k+1)} & b_{42}^{(k+1)} & b_{43}^{(k+1)} & b_{44}^{(k+1)} \end{vmatrix} = \kappa^2 b_{33} b_{44}^{(k+1)}.$$

Cuối cùng

$$B_0B_1B_2B_{k+1} = -\begin{vmatrix} \kappa & 0 & 0 \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{41}^{(k+1)} & b_{42}^{(k+1)} & b_{43}^{(k+1)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ 0 & \kappa & 0 \\ b_{41}^{(k+1)} & b_{42}^{(k+1)} & b_{43}^{(k+1)} \end{vmatrix}$$
$$= -\kappa \begin{vmatrix} b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{42}^{(k+1)} & b_{43}^{(k+1)} \end{vmatrix} - \kappa \begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{41}^{(k+1)} & b_{43}^{(k+1)} \end{vmatrix}.$$

Tiếp theo, ta có

$$\varphi_3^{(k+3)}(0) - (k+3)(b_{11}+b_{22})\varphi_2^{(k+2)}(0) = \frac{(k+2)(k+3)}{2}\left[B_0B_2B_{k+1} + B_1B_1B_{k+1} - 2(b_{11}+b_{22})B_1B_{k+1}\right] + \dots$$

trong đó các dấu chấm biểu thị các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k+1$.

Ta quan chi tiết hơn

$$B_0B_2B_{k+1} = -\begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{41}^{(k+1)} & b_{43}^{(k+1)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{42}^{(k+1)} & b_{43}^{(k+1)} \end{vmatrix},$$
$$\frac{B_1B_1B_k}{2} = (\kappa^2 + 2\kappa b_{33})b_{44}^{(k+1)}$$

và

$$B_1B_{k+1} = (2\kappa + b_{33})b_{44}^{(k+1)}.$$

Do đó tồn tại các hằng số c_2, c_3, c_4 chỉ phụ thuộc vào B_1 và B_2 sao cho tổ hợp tuyến tính sau

$$\frac{\varphi_4^{(k+4)}(0) - (k+3)(k+4)\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}\varphi_2^{(k+2)}(0)}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} +$$
$$c_2\frac{\varphi_3^{(k+3)}(0) - (k+3)(b_{11}+b_{22})\varphi_2^{(k+2)}(0)}{(k+1)(k+2)(k+3)} + c_3\frac{\varphi_2^{(k+1)}(0)}{k+1} + c_4\frac{\varphi_1^{(k+1)}(0)}{k+1} \quad (3.55)$$

không có hạng tử của B_{k+1}. Phần tuyến tính của nó theo B_k định nghĩa tọa độ thứ tư của $L_{B_0,B_1,B_2}(B_k)$.

Ta liệt kê năm phương trình để giải theo B_2.

$$\varphi_1''(0) = \sigma_1(B_2) = b_{11}^{(2)} + b_{22}^{(2)} + b_{33}^{(2)} + b_{44}^{(2)}, \quad (3.56)$$
$$\varphi_2''(0) = B_0B_2 + 2\sigma_2(B_1) = -b_{43}^{(2)} + 2\sigma_2(B_1), \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned}\varphi_3^{(4)}(0) - 4(b_{11}+b_{22})\varphi_2'''(0) &= 3B_0B_2B_2 + 6B_1B_1B_2 \\ &\quad - 12(b_{11}+b_{22})B_1B_2 \\ &= 6\left[-(b_{11}^{(2)}+b_{22}^{(2)})b_{43}^{(2)} + b_{41}^{(2)}b_{13}^{(2)} + b_{42}^{(2)}b_{23}^{(2)}\right] + \dots, \quad (3.58)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_4^{(5)}(0) - 20\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}\varphi_2'''(0) &= 15B_0B_1B_2B_2 \\ &\quad + 10B_1B_1B_1B_2 - 60\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}B_1B_2 \\ &= 30\left(-b_{11}\begin{vmatrix} b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{42}^{(2)} & b_{43}^{(2)}\end{vmatrix} - b_{22}\begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{41}^{(2)} & b_{43}^{(2)}\end{vmatrix} + \dots\right) \\ &\quad + (\text{ hạng tử theo } B_2 \text{ bậc} \le 1), \quad (3.59)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(\varphi_4^{(6)}(0) - 30\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}\varphi_2^{(4)}(0)\right) + c_2\left[\varphi_3^{(5)}(0) - 5(b_{11}+b_{22})\varphi_2^{(4)}(0)\right] \\ &+ c_3\varphi_2'''(0) + c_4\varphi_1'''(0) = 15B_0B_2B_2B_2 + \dots (\text{ phương trình bậc ba theo } B_2) \\ &\qquad = -90\begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{41}^{(2)} & b_{42}^{(2)} & b_{43}^{(2)}\end{vmatrix} + \dots \quad (3.60)\end{aligned}$$

Hai phương trình (3.56) và (3.57) đều tuyến tính, do đó giải chúng cho thấy B_2 chạy trong một không gian afin con của $\mathbb{C}^{4,4}$ trong đó $b_{ij}^{(2)}$ với $(i,j) \notin \{(4,3),(4,4)\}$ là tự do và $b_{43}^{(2)}, b_{44}^{(2)}$ phụ thuộc tuyến tính lên $b_{ij}^{(2)}$.

Ta nhận xét là có thể thay đổi b_{33} và b_{44} của B_1 mà không thay đổi lớp tương đương của dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ sao cho $b_{33} \neq b_{44}$. Cụ thể là, nếu ta nhìn vào giao hoán tử với B_0 trong Bảng 3.6, sự sửa đổi có dạng như sau $b_{33,\text{mới}} = b_{33} + a$ và $b_{44,\text{mới}} = b_{44} - a$ trong đó a là số phức bất kỳ. Điều này làm cho phương trình (3.58) không suy biến theo $b_{33}^{(2)}$.

Bây giờ, ta chọn các giá trị cho $b^{(2)}ij$ trong đó $(i,j) \notin \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(3,3)\}$ sao cho năm phương trình (3.56) - (3.60) trở thành một hệ Cramer các phương trình tuyến tính $b_{33}^{(2)}, b_{41}^{(2)}, b_{42}^{(2)}, b_{43}^{(2)}$ và $b_{44}^{(2)}$. Sự thoải mái trong chọn lựa đảm

bảo hạng của hạn chế của L_{B_0,B_1,B_2} lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\}$$

bằng 4.

Chứng minh Định lý 3.13 Như trong chứng minh trước, các điều kiện cần là đương nhiên trừ điều kiện cuối $\varphi_4^{(5)}(0) = 0$ mà chứng minh của nó là tính toán trực tiếp được hỗ trợ bởi nhận xét sau

$$B_0 B_1 M N = 0$$

với mọi $M, N \in \mathbb{C}^{4,4}$ do dạng đặc biệt của B_1 trong trường hợp, cụ thể là

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix}.$$

Dạng tuyến tính $M \mapsto B_0 B_1 B_2 M$ bị triệt tiêu, do đó ánh xạ tuyến tính L_{B_0,B_1,B_2} trong chứng minh của Định lý 3.12 không còn có ích nữa. Ta cần phải xét $\varphi_4^{(k+4)}(0)$ thay cho $\varphi_4^{(k+3)}(0)$ trong (3.47) với $k \geq 3$. Trước khi tính $\varphi_4^{(k+4)}(0)$ theo B_i, ta nhắc lại là với $M, N \in \mathbb{C}^{4,4}$

$$B_0 B_1 M N = 0.$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned} \varphi_4^{(k+4)}(0) &= \left(\frac{\Phi \cdot \Phi \cdot \Phi \cdot \Phi}{4!} \right)^{(k+4)} (0) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{8} \left(B_0 B_2 B_2 B_k \right. \\ &\quad \left. + 2 B_1 B_1 B_2 B_k \right) + \dots \end{aligned} \tag{3.61}$$

trong đó các dấu chấm biểu thị các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k$. Tính toán này cho tọa độ thứ tư của L_{B_0,B_1,B_2}. Kết hợp cái này với ba tọa độ đầu tiên của (3.48), ánh xạ liên kết hợp mới có dạng

$$\begin{aligned} L_{B_0,B_1,B_2}(M) = (\sigma_1(M), B_0 M, B_1 B_1 M + B_0 B_2 M, \\ B_0 B_2 B_2 M + 2 B_1 B_1 B_2 M) . \end{aligned} \tag{3.62}$$

Ta rõ ràng hạn chế của L_{B_0,B_1,B_2} lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\}$$

như sau.

$$\begin{aligned} \sigma_1(M) =& m_{44}, \\ B_0 M =& -m_{43}, \\ B_1 B_1 M + B_0 B_2 M =& b_{13}^{(2)} m_{41} + b_{23}^{(2)} m_{42} - (b_{11}^{(2)} + b_{22}^{(2)}) m_{43} \\ B_0 B_2 B_2 M + 2 B_1 B_1 B_2 M =& -\begin{vmatrix} b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \end{vmatrix} m_{41} + \begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{21}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \end{vmatrix} m_{42} - \begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} \end{vmatrix} m_{43}. \end{aligned}$$

Chú ý ở đây là với

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix},$$

ta có

$$B_1 B_1 M = B_1 B_1 B_2 M = 0.$$

Do đó hạng của hạn chế này là cực đại khi và chỉ khi

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} b_{13}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ -\begin{vmatrix} b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{21}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \end{vmatrix} \end{pmatrix} = 2. \tag{3.63}$$

Tiếp theo, ta chỉ ra cách chọn B_2 thích hợp sao cho hạng của hạn chế của L_{B_0,B_1,B_2} lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\}$$

là cực đại,tức là bằng 4. Đầu tiên ta phải giải các phương trình theo B_2

$$\begin{aligned}
\varphi_1''(0) =& \sigma_1(B_2), && (3.64)\\
\varphi_2''(0) =& B_0B_2 + 2\sigma_2(B_1), && (3.65)\\
\frac{\varphi_3^{(4)}(0)}{4} =& \frac{3}{4}B_0B_2B_2 + \frac{3}{2}B_1B_1B_2, && (3.66)\\
\frac{\varphi_4^{(6)}(0)}{\frac{6!}{8}} =& \frac{B_0B_2B_2B_2}{3} + B_1B_1B_2B_2. && (3.67)
\end{aligned}$$

Ta thực hiện quan sát đầu tiên: Hai phương trình (3.64) và (3.65) là tuyến tính; cái thứ ba (3.66) là bậc hai và cái thứ tư (3.67) là bậc ba. Các hạng tử bậc hai và bậc ba tương ứng được tính như sau.

$$\begin{aligned}
\frac{B_0B_2B_2}{2} &= -\begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{41}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{42}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix}\\
\frac{B_0B_2B_2B_2}{3!} &= -\begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{41}^{(2)} & b_{42}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Bây giờ, ta chọn các giá trị thích hợp của $b_{ij}^{(2)}$ với $(i,j) \notin \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$ hạng trong 3.63 bằng 2 và bốn phương trình 3.64-3.67 tạo thành một hệ Cramer các phương trình tuyến tính theo $b_{41}^{(2)}, b_{42}^{(2)}, b_{43}^{(2)}, b_{44}^{(2)}$. Điều này kết thúc chứng minh Định lý 3.13.

3.9.2 Trường hợp $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$

Nhìn vào Bảng 3.5 các hệ số của L_{B_0,B_1}, ta thấy rằng $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$ khi và chỉ khi

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} -b_{43} & 0 & b_{41} & 0 & -b_{43} & b_{42} & b_{13} & b_{23} \\ -\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{42} & b_{43} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{42} & b_{43} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} \end{pmatrix} = 1. \quad (3.68)$$

Điều này tương đương với việc $\{b_{41}, b_{42}, b_{43}, b_{13}, b_{23}\} \neq \{0\}$ và tồn tại một hằng số $\kappa \in \mathbb{C}$ sao cho

$$\Bigg(-\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{42} & b_{43} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{42} & b_{43} \end{vmatrix},$$
$$-\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix}\Bigg) =$$
$$= \kappa(-b_{43}, 0, b_{41}, 0, -b_{43}, b_{42}, b_{13}, b_{23}) \quad (3.69)$$

Quan hệ này nghĩa là

$$\frac{B_0B_1B_1M}{2} - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} B_0M = \kappa\left[B_0B_1M - (b_{11}+b_{22})B_0M\right] \quad (3.70)$$

với mọi $M \in \mathbb{C}^{4,4}$. Ta suy ra là nếu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương, thì

$$\begin{aligned} \varphi_2''(0) =& B_0B_2 + 2\sigma_2(B_1) \\ \frac{\varphi_3'''(0)}{3} =& B_0B_1B_2 + 2\sigma_3(B_1) \\ \frac{\varphi_4^{(4)}(0)}{12} =& \frac{B_0B_1B_1B_2}{2} + 2\sigma_4(B_1), \end{aligned}$$

do đó ta có

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi_4^{(4)}(0)}{12} - \kappa\frac{\varphi_3'''(0)}{3} - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \varphi_2''(0) = 2\sigma_4(B_1) \\ &\quad - 2\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \sigma_2(B_1) - 2\kappa\sigma_3(B_1) + 2k(b_{11}+b_{22})\sigma_2(B_1) \end{aligned} \quad (3.71)$$

Ta có thể phát biểu định lý.

Định lý 3.14. *Nếu* $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$, *thì dữ liệu* $\{\varphi, B_0, B_1\}$ *nâng được địa phương khi và chỉ khi các điều kiện sau được thỏa mãn*

(i) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$,

(ii) $\varphi_1'(0) = \sigma_1(B_1)$, $\varphi_2'(0) = B_0B_1 = -b_{43}$,

(iii) $\varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0$,

(iv) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$, $\varphi_4''(0) = 0$,

(v) $\varphi_4'''(0) = B_0B_1B_1B_1$,

(vi) $\dfrac{\varphi_4^{(4)}(0)}{12} - \kappa\dfrac{\varphi_3'''(0)}{3} - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \varphi_2''(0) = 2\sigma_4(B_1) - 2\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \sigma_2(B_1)$
$- 2k\sigma_3(B_1) + 2\kappa(b_{11}+b_{22})\sigma_2(B_1)$.

Chứng minh Định lý 3.14 Các điều kiện cần được giải thích ngay trước (3.71). Để chứng minh các điều này là đủ, ta phải tìm $B_2 \in \mathbb{C}^{4,4}$ và B_k có dạng

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \text{ với } k \geq 3$$

hoặc

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{bmatrix} \text{ với} k \geq 3.$$

Ta xét hai trường hợp con: $\{b_{13}, b_{23}\} \neq \{0\}$ hoặc $b_{13} = b_{23} = 0$.

$$\boxed{\text{Trường hợp con 1: } \{b_{13}, b_{23}\} \neq \{0\}}$$

Trong trường hợp này, ta có thể giả sử $b_{13} = 0$ và $b_{23} \neq 0$. Lý do là như sau. Theo Mệnh đề 3.2, ta luôn có thể thay thế B_1 bởi $E^{-1}B_1E$ với $E \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$ giao hoán với B_0 mà không làm thay đổi bản chất của bài toán nâng. Ta viết B_1 trong dạng ma trận khối như sau

$$B_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

trong đó $A, B, C, D \in \mathbb{C}^{2,2}$. Xét

$$E = \begin{bmatrix} X & O_{2\times 2} \\ O_{2\times 2} & Y \end{bmatrix}$$

trong đó $X \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ và

$$Y = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}).$$

Không khó để thấy rằng E giao hoán với B_0. Bây giờ ta tính toán $E^{-1}B_1E$ như sau.

$$\begin{aligned} E^{-1}B_1E &= \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & Y^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X^{-1}AX & X^{-1}BY \\ Y^{-1}CX & Y^{-1}DY \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Nhận xét rằng

$$B = \begin{bmatrix} b_{13} & 0 \\ b_{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ta biết là BY là một ma trận có các cột là tổ hợp tuyến tính của các cột của B, và $X^{-1}B$ là một ma trận có các hàng là tổ hợp tuyến tính của các hàng của B. Nếu $b_{13} \neq 0$, thì ta có thể chọn X thích hợp sao cho b_{13} triệt tiêu và $b_{23} \neq 0$. Nhân tiện, do $-\begin{bmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \kappa b_{13} = 0$, nên ta thu được $b_{12} = 0$.

Chuyển qua bước tiếp theo, ta sẽ làm rõ dạng của L_{B_0,B_1,B_2}. Do hạng của L_{B_0,B_1} bằng 3, nên ánh xạ mới L_{B_0,B_1,B_2} giữ nguyên ba tọa độ đầu tiên của L_{B_0,B_1}, chỉ có tọa độ thứ tư cần làm rõ. Tọa độ thứ tư của L_{B_0,B_1} được nhận từ $\varphi_4^{(k+2)}(0)$, do đó lần này, ta chuyển qua $\varphi_4^{(k+3)}(0)$.

$$\begin{aligned} \varphi_4^{(k+3)}(0) =& \frac{(k+2)(k+3)}{3!}\left[3B_0B_1B_1B_{k+1} + (k+1)B_1B_1B_1B_k \right. \\ & \left. 3(k+1)B_0B_1B_2B_k\right] + \dots \end{aligned} \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3^{(k+2)}(0) =& (k+2)\left(B_0B_1B_{k+1} + \frac{k+1}{2}B_1B_1B_k \right. \\ & \left. \frac{k+1}{2}B_0B_2B_2\right) + \dots \end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\varphi_2^{(k+1)}(0) = B_0B_{k+1} + (k+1)B_1B_k + \dots \tag{3.75}$$

Do

$$B_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix},$$

nên ta có

$$\begin{aligned} \frac{B_0B_1B_1B_{k+1}}{2} =& -\begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{41}^{(k+1)} & b_{42}^{(k+1)} & b_{43}^{(k+1)} \end{vmatrix} \\ =& b_{11}b_{23}b_{42}^{(k+1)} - b_{11}b_{22}b_{42}^{(k+1)} \\ =& b_{11}\left[B_0B_1B_{k+1} - (b_{11}+b_{22})B_0B_{k+1}\right] + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} B_0B_{k+1} \\ =& b_{11}B_0B_1B_{k+1} - b_{11}^2B_0B_{k+1}. \end{aligned}$$

Ta suy ra rằng

$$\begin{aligned}&\frac{\varphi_4^{(k+3)}(0)}{(k+1)(k+2)(k+3)} - b_{11}\frac{\varphi_3^{(k+2)}(0)}{(k+1)(k+2)}\\&+ b_{11}^2\frac{\varphi_2^{(k+1)}(0)}{k+1} = \left\{\frac{B_1B_1B_1B_k}{3!} + \frac{B_0B_1B_2B_k}{2}\right.\\&\left.-b_{11}\left(\frac{B_1B_1B_k}{2} + \frac{B_0B_2B_k}{2}\right) + b_{11}^2B_1B_k\right\} + \dots\end{aligned} \tag{3.76}$$

trong đó các dấu chấm biểu thị các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k$. Biểu thức ở trong $\{\}$ của phương trình trên chính là tọa độ thứ tư của $L_{B_0,B_1,B_2}(B_k)$.

Nhắc lại là điều ta muốn là hạng của hạn chế của L_{B_0,B_1,B_2} lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\}$$

bằng 4. Điều này chỉ phụ thuộc vào tọa độ thứ tư của $L_{B_0,B_1,B_2}(M)$ và hệ số của nó ứng với m_{41}. Do đó ta làm rõ hệ số này.

Cho

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}.$$

Đầu tiên ta thấy rằng

$$\frac{B_1B_1B_1M}{3!} = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix}$$

không có m_{41}.

Hai là,

$$\frac{B_1B_1M}{2} = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{33} & 0 \\ m_{41} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & 0 \\ 0 & b_{33} & 0 \\ m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix}$$

cũng không có m_{41}.

Ba là,

$$B_1M = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 \\ m_{41} & m_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & 0 \\ m_{42} & m_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{33} & 0 \\ m_{43} & m_{44} \end{vmatrix}$$

cũng không có m_{41}.

Do đó chỉ có $\frac{B_0B_1B_2M}{2} - b_{11}\frac{B_0B_2M}{2}$ tạo thành hệ số đối với m_{41}. Hệ số của m_{41} trong $B_0B_1B_2M$ là

$$-\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} = -b_{12}^{(2)}b_{23} + b_{13}^{(2)}b_{22}.$$

Hệ số của m_{41} trong B_0B_2M là $b_{13}^{(2)}$.

Do đó, hệ số của m_{41} trong tọa độ thứ tư của $L_{B_0,B_1,B_2}(M)$ là

$$\frac{1}{2}\left[-b_{23}b_{12}^{(2)} + (b_{22} - b_{11})b_{13}^{(2)}\right]. \tag{3.77}$$

Do đó hạng của hạn chế của L_{B_0,B_1,B_2} lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\}$$

là cực đại, tức là bằng 4 khi và chỉ khi hệ số này khác 0. Bây giờ là lúc ta khảo sát các ràng buộc trên B_2. Ta có bốn phương trình theo B_2

$$\varphi_1''(0) = \sigma_1(B_2), \tag{3.78}$$

$$\varphi_2''(0) = B_0B_2 + 2\sigma_2(B_1), \tag{3.79}$$

$$\frac{\varphi_3'''(0)}{3} = B_0B_1B_2 + 2\sigma_3(B_1), \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi_4^{(5)}(0)}{3.4.5} - b_{11}\frac{\varphi_3^{(4)}(0)}{3.4} + b_{11}^2\frac{\varphi_2''(0)}{3} = \\ &= \frac{B_0B_1B_2B_2}{4} - b_{11}\frac{B_0B_2B_2}{4} + \frac{B_1B_1B_1B_2}{3!} - b_{11}\frac{B_1B_1B_2}{2} \\ &+ b_{11}^2B_1B_2. \end{aligned} \tag{3.81}$$

Ta thấy rằng phương trình thứ tư là bậc hai. Ta làm rõ các hạng tử bậc hai của nó

$$\frac{B_0B_2B_2}{2} = -\begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{41}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{42}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix},$$

$$\frac{B_0B_1B_2B_2}{2} = -\begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{41}^{(2)} & b_{42}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{41}^{(2)} & b_{42}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{vmatrix}.$$

Bây giờ ta chứng minh rằng bốn phương trình có một nghiệm B_2 mong muốn. Đầu tiên, ba phương trình thứ nhất (3.78) - (3.80) tạo thành một hệ phương trình tuyến tính có hạng 3. Việc giải chúng cho thấy B_2 chạy trong một không gian afin con 13 chiều của $\mathbb{C}^{4,4}$ trong đó $b_{ij}^{(2)}$ có thể nhận bất kỳ giá trị nào ta muốn với $(i,j) \notin \{(4,2),(4,3),(4,4)\}$. Hai là, ta giải thích vì sao không gian afin con này chứa một B_2 sao cho hệ số trong (3.77) là khác 0.

Ta nhận xét là phương trình thứ tư (3.81) chứa hạng tử

$$b_{23}\begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} \\ b_{41}^{(2)} & b_{42}^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Khi đó B_2 được tìm thấy như sau. Ta chọn và cố định các giá trị của $b_{ij}^{(2)}$ với $(i,j) \notin \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$ sao cho hệ số trong (3.77) là khác 0 và phương trình thứ tư (3.81) trở thành một phương trình tuyến tính không suy biến theo $b_{41}^{(2)}$. Do đó ta nhận được B_2 mong muốn, cho phép ta tìm được B_k mong muốn với $k \geq 3$. Điều này kết thúc chứng minh trường hợp con 1 (xem trang 98).

Trường hợp con 2: $b_{13} = b_{23} = 0$

Ta nhận xét là có một sự đối xứng giữa $\{b_{13}, b_{23}\}$ và $\{b_{41}, b_{42}\}$. Cụ thể là nếu $\{b_{41}, b_{42}\} \neq \{0\}$, thì ta có thể lặp lại các lý luận ở Trường hợp con 1 với B_k bây giờ có dạng

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{bmatrix}$$

trong đó $k \geq 3$.

Do đó, ta có thể giả sử thêm rằng

$$b_{41} = b_{42} = b_{13} = b_{23} = 0$$

trong trường hợp con này. Khi đó, $b_{43} \neq 0$, nếu không thì $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1})$ bằng 2. Suy ra

$$b_{11} = b_{22} = k$$

trong đó k là hằng số trong điều kiện cần và đủ của Định lý 3.14 và

$$b_{21} = b_{12} = 0.$$

Tình huống bây giờ rất gần với tình huống của trường hợp con của trường hợp mà $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 2$ ở trang 90, trong đó

$$B_1 = \begin{bmatrix} \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix}$$

với $\kappa \neq 0$.

Nhưng bây giờ, b_{43} của B_1 khác 0, do đó dạng B_1 đang xét là

$$B_1 = \begin{bmatrix} \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

với $\kappa \neq 0$.

Ta có thể lặp lại các lý luận ở đó nhưng thay vì 5 phương trình, ta sẽ có 6 phương trình mà trong đó 3 phương trình đầu tiên là tuyến tính và ứng với hạng 3 của L_{B_0,B_1}. Lần này, ta sẽ cố định các giá trị của $b_{ij}^{(2)}$ sao cho 6 phương trình trở thành hệ Cramer đối với $b_{11}^{(2)}, b_{33}^{(2)}, b_{41}^{(2)}, b_{42}^{(2)}, b_{43}^{(2)}$ và$b_{44}^{(2)}$. Điều này kết thúc trường hợp con.

3.9.3 Trường hợp $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 4$.

Nhắc lại $L_{B_0,B_1}(M) = (\sigma_1(M), B_0M, B_0B_1M, \frac{B_0B_1B_1M}{2})$ và giả sử $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 4$. Ta phát biểu kết quả.

Định lý 3.15. *Dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương khi và chỉ khi*

(i) $\varphi(0) = \pi(B_0)$,

(ii) $\varphi'(0) = \mathrm{D}\pi_{B_0}B_1$ *trong đó* $\mathrm{D}\pi_{B_0}$ *là đạo hàm toàn phần của* π *tại* B_0,

(iii) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$, $\varphi_4''(0) = 0$, $\varphi_4'''(0) = B_0B_1B_1B_1$.

Chứng minh Định lý 3.15 Nếu

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} b_{13} & b_{23} \\ -\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} \end{pmatrix} = 2,$$

thì hạn chế của L_{B_0,B_1} lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\}$$

có hạng cực đại, tức là bằng 4, do đó ta có thể tìm được B_k có dạng

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

với $k \geq 2$, điều này cho ta ánh xạ nâng mong muốn.

Điều tương tự xảy ra nếu

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} b_{41} & b_{42} \\ -\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} \end{pmatrix} = 2.$$

Trong trường hợp này, B_k có dạng

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{bmatrix}$$

với $k \geq 2$.

Do đó, ta chỉ cần xét trường hợp hai hạng này không vượt quá 1.

$$\boxed{\text{Trường hợp con 1: } (b_{13}, b_{23}) \neq \vec{0}}$$

Sửa đổi B_1 bằng các giao hoán tử đối với B_0 ở trang 98, ta có thể giả sử $b_{13} = 0$ và $b_{23} \neq 0$.

Do

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} b_{13} & b_{23} \\ -\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} \end{pmatrix} = 1$$

và

$$\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} = -b_{12}b_{23}(\text{do } b_{13} = 0),$$

ta suy ra $b_{12} = 0$, do đó

$$B_1 = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Với

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix},$$

ta có

$$\begin{aligned} \frac{B_0B_1B_1M}{2} =& b_{11}b_{23}m_{42} - b_{11}b_{22}m_{43} \\ =& b_{11}\left[B_0B_1M - (b_{11} + b_{22})B_0M\right] + b_{11}b_{22}B_0M \\ =& B_0B_1M - b_{11}^2B_0M. \end{aligned}$$

Giả sử

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

với $k \geq 3$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi_4^{(k+3)}(0)}{(k+1)(k+2)(k+3)} - b_{11}\frac{\varphi_3^{(k+2)}(0)}{(k+1)(k+2)} + b_{11}^2\frac{\varphi_2^{(k+1)}(0)}{k+1} = \\ &= \left[\frac{B_1B_1B_1B_k}{3!} + \frac{B_0B_1B_2B_k}{2} - b_{11}\left(\frac{B_1B_1B_k}{2} + \frac{B_0B_2B_k}{2}\right) + b_{11}^2B_1B_k\right] + \dots \end{aligned} \tag{3.82}$$

trong đó các dấu chấm biểu thị các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k$.

Ta tính hệ số của $b_{41}^{(k)}$ trong ngoặc vuông [] ở trên.

$$\frac{B_1B_1B_1B_k}{3!} = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 \\ b_{41}^{(k)} & b_{42}^{(k)} & b_{43}^{(k)} & b_{44}^{(k)} \end{vmatrix}$$

không chứa $b_{41}^{(k)}$.

$$\begin{aligned}
B_0B_1B_2B_k =& -\begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{41}^{(k)} & b_{42}^{(k)} & b_{43}^{(k)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{41}^{(k)} & b_{42}^{(k)} & b_{43}^{(k)} \end{vmatrix} \\
=& b_{11}\begin{vmatrix} b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{42}^{(k)} & b_{43}^{(k)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{41}^{(k)} & b_{42}^{(k)} & b_{43}^{(k)} \end{vmatrix} \\
=& -\left(b_{23}b_{12}^{(2)} - b_{22}b_{13}^{(2)}\right) b_{41}^{(k)} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{B_1B_1B_k}{2} =& \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{41}^{(k)} & b_{42}^{(k)} & b_{44}^{(k)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{33} & 0 \\ b_{41}^{(k)} & b_{43}^{(k)} & b_{44}^{(k)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & 0 \\ 0 & b_{33} & 0 \\ b_{42}^{(k)} & b_{42}^{(k)} & b_{44}^{(k)} \end{vmatrix} \\
=& \text{không chứa } b_{41}^{(k)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_0B_2B_k =& \begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{41}^{(k)} & b_{43}^{(k)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{42}^{(k)} & b_{43}^{(k)} \end{vmatrix} \\
=& b_{13}^{(2)}b_{41}^{(k)} + \dots
\end{aligned}$$

Hệ số của $b_{41}^{(k)}$ trong ngoặc vuông [ ] do đó là

$$\frac{b_{22}b_{13}^{(2)} - b_{23}b_{12}^{(2)} - b_{11}b_{13}^{(2)}}{2} = \frac{1}{2}\left[(b_{22} - b_{11})b_{13}^{(2)} - b_{23}b_{12}^{(2)}\right].$$

Nếu hệ số này khác 0, thì hạng của hạn chế của

$$L_{B_0,B_1,B_2}(M) = \left(\sigma_1(M), B_0M, B_0B_1M, \frac{B_0B_1B_2M}{2} + \dots\right)$$

lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\}$$

bằng 4. Do đó khi ta giải các phương trình liên quan tới B_2, ta sẽ phải chú ý tới điều kiện này.

Ta liệt kê các phương trình cần giải theo B_2.

$$\begin{aligned}
\varphi_1''(0) =& \sigma_1(B_2), && (3.83)\\
\varphi_2''(0) =& B_0B_2 + 2\sigma_2(B_1), && (3.84)\\
\frac{\varphi_3'''(0)}{3} =& B_0B_1B_2 + 2\sigma_3(B_1), && (3.85)\\
\frac{\varphi_4^{(4)}(0)}{12} =& \frac{B_0B_1B_1B_2}{2} + 2\sigma_4(B_1), && (3.86)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi_4^{(5)}(0)}{3.4.5} - b_{11}\frac{\varphi_3^{(4)}(0)}{3.4} + b_{11}^2\frac{\varphi_2'''(0)}{3} =& \left(\frac{B_0B_1B_2B_2}{4} - b_{11}\frac{B_0B_2B_2}{4}\right)\\
&+ \left(\frac{B_1B_1B_1B_2}{3!} - b_{11}\frac{B_1B_1B_2}{2} + b_{11}^2B_1B_2\right). \quad (3.87)
\end{aligned}$$

Ta tính phần bậc hai trong phương trình (3.87). Có hai hạng tử bậc hai:

$$\begin{aligned}
\frac{B_0B_1B_2B_2}{2} =& -b_{11}\begin{vmatrix} b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{42}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix} + b_{21}\begin{vmatrix} b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{42}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix} - b_{22}\begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{41}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix}\\
&+ b_{23}\begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} \\ b_{41}^{(2)} & b_{42}^{(2)} \end{vmatrix} - b_{41}\begin{vmatrix} b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \end{vmatrix} + b_{42}\begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{41}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix} - b_{43}\begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

và

$$b_{11}\frac{B_0B_2B_2}{2} = -b_{11}\left(\begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{41}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{42}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix}\right).$$

Do đó ta có thể tìm thấy hạng tử bậc hai chứa $b_{41}^{(2)}$ trong phương trình (3.87) mà chính xác là

$$\left[(b_{22} - b_{11} - b_{41})b_{13}^{(2)} - b_{23}b_{12}^{(2)}\right] b_{41}^{(2)}.$$

Do

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank}\Bigg(& \begin{matrix} -b_{43} & 0 & b_{41} & 0 \\ -\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{42} & b_{43} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{42} & b_{43} \end{vmatrix} \end{matrix}\\
& \begin{matrix} -b_{43} & b_{42} & b_{13} & b_{23} \\ -\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} \end{matrix}\Bigg) = 2,
\end{aligned}$$

$b_{13} = 0$ và $b_{23} \neq 0$, nên tồn tại một ma trận vuông con khả nghịch của ma trận trên chứa cột

$$\begin{bmatrix} b_{23} \\ \begin{vmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} \end{bmatrix}.$$

For example

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} -b_{43} & b_{23} \\ -\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{42} & b_{43} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} \end{pmatrix} = 2.$$

Khi đó ta giải 5 phương trình (3.83) - (3.87) như sau. Ta cố định các giá trị của $b_{ij}^{(2)}$ với $(i,j) \notin \{(1,1),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$ sao cho các phương trình này trở thành một hệ Cramer theo $b_{11}^{(2)}$, $b_{41}^{(2)}$, $b_{42}^{(2)}$, $b_{43}^{(2)}$, và $b_{44}^{(2)}$ và hạng của hạn chế của L_{B_0,B_1,B_2} lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\}$$

bằng 4.

Nhưng có một tình huống mà mọi B_2 thỏa mãn 5 phương trình trên (3.83) - (3.87) đều có thể làm cho hệ số của $b_{41}^{(k)}$

$$\frac{1}{2}\left[(b_{22} - b_{11})b_{13}^{(2)} - b_{23}b_{12}^{(2)}\right] = 0.$$

Điều này tương đương với việc

$$b_{12}^{(2)} = \frac{b_{22} - b_{11}}{b_{23}} b_{13}^{(2)}.$$

Trong tình huống này ta phải có

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} -b_{43} & -b_{43} & b_{42} & b_{23} \\ -\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{42} & b_{43} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} \end{pmatrix} = 1.$$

Khi đó, ta buộc phải tiếp tục chuyển sang $\varphi_4^{(k+4)}(0)$. Ta biết là

$$\frac{\varphi_4^{(k+4)}(0)}{(k+2)(k+3)(k+4)} - b_{11}\frac{\varphi_3^{(k+3)}(0)}{(k+2)(k+3)} + b_{11}^2\frac{\varphi_2^{(k+2)}(0)}{k+2}$$

là một hàm afin của

$$B_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

trong đó hệ số của $b_{41}^{(k+1)}$ bằng 0, điều này là hệ quả của tình huống. Điều đó dẫn tới là ta có thể triệt tiêu toàn bộ các hạng tử chứa B_{k+1} trong biểu thức trên bằng cách tổ hợp tuyến tính nó với $\varphi_1^{(k+1)}(0)$, $\varphi_2^{(k+1)}(0)$ và $\varphi_3^{(k+2)}(0)$. Như vậy ta sẽ nhận được phương trình thứ sáu theo B_2, đây là phương trình bậc ba mà hạng tử bậc ba duy nhất (sai khác hằng số nhân khác 0) là

$$\frac{B_0B_2B_2B_2}{3!} = -\begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{41}^{(2)} & b_{42}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Ta làm rõ tọa độ thứ tư của L_{B_0,B_1,B_2}

$$L_{B_0,B_1,B_2}(M) = (\sigma_1(M), B_0M, B_0B_1M, *).$$

Phần tuyến tính theo B_{k+1} trong

$$\frac{\varphi_4^{(k+4)}(0)}{(k+2)(k+3)(k+4)} - b_{11}\frac{\varphi_3^{(k+3)}(0)}{(k+2)(k+3)} + b_{11}^2\frac{\varphi_2^{(k+2)}(0)}{k+2}$$

là

$$\frac{B_1B_1B_1B_{k+1}}{3!} + \frac{B_0B_1B_2B_{k+1}}{2} - b_{11}\left(\frac{B_1B_1B_{k+1}}{2} + \frac{B_0B_2B_k}{2}\right) + b_{11}^2B_1B_{k+1}.$$

Đặt

$$B_{k+1} = M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

với $k \geq 2$. Bây giờ ta tính toán chi tiết hơn.

$$\frac{B_1B_1B_1M}{3!} = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{vmatrix} m_{44}.$$

$$\frac{B_0B_1B_2M}{2} = -\frac{1}{2}\left(b_{11}\begin{vmatrix} b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ m_{42} & m_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} \end{vmatrix}\right).$$

$$\frac{B_1B_1M}{2} = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{33} & 0 \\ m_{41} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & 0 \\ 0 & b_{33} & 0 \\ m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix}.$$

$$\frac{B_0B_2M}{2} = -\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ m_{41} & m_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ m_{42} & m_{43} \end{vmatrix}\right).$$

Suy ra

$$\frac{B_1B_1B_1M}{3!} + \frac{B_0B_1B_2M}{2} - b_{11}\left(\frac{B_1B_1M}{2} + \frac{B_0B_2M}{2}\right) + \\ + b_{11}^2 B_1M = \alpha m_{42} + \beta m_{43} + \gamma m_{44}$$

(không có m_{41} ở đây bởi vì $(b_{22} - b_{11})b_{13}^{(2)} - b_{23}b_{12}^{(2)} = 0$ với mọi B_2 thỏa mãn các phương trình (3.83) - (3.87)) trong đó α, β và γ là các dạng afin theo hệ số đầu vào của B_2.

Tọa độ thứ tư của $L_{B_0,B_1,B_2}(B_k)$ là phần tuyến tính theo B_k của

$$\frac{1}{k+1}\left\{\frac{\varphi_4^{(k+4)}(0)}{(k+2)(k+3)(k+4)} - b_{11}\frac{\varphi_3^{(k+3)}(0)}{(k+2)(k+3)} + b_{11}^2\frac{\varphi_2^{(k+2)}(0)}{k+2}\right. \\ \left. -\frac{\alpha}{b_{23}}\left[\frac{\varphi_3^{(k+2)}(0)}{k+2} - (b_{11}+b_{22})\varphi_2^{(k+1)}(0)\right] + \beta\varphi_2^{(k+1)}(0) - \gamma\varphi_1^{(k+1)}(0)\right\} \\ = \frac{B_0B_2B_2B_k}{4} + \frac{B_1B_1B_2B_k}{4} + aB_1B_2B_k + bB_0B_2B_k + \\ + cB_1B_1B_k + dB_2B_k + eB_1B_k + fB_0B_k$$

trong đó

- a và d là các hằng số,
- b, c, e và f là các dạng afin theo $b_{23}^{(2)}$, $b_{11}^{(2)}$ và $b_{13}^{(2)}$.

Ta thấy rằng phần bậc hai của các hệ số của các hệ số đầu vào của B_k trong biểu thức trên nhận được từ $\frac{B_0B_2B_2B_k}{4}$ và $aB_1B_2B_k$.

Hệ số của $b_{41}^{(k+1)}$ trong $\frac{B_0B_2B_2B_k}{4}$ là

$$-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}b_{13}^{(2)}\begin{vmatrix} \frac{b_{22}-b_{11}}{b_{23}} & 1 \\ b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \end{vmatrix}$$

và trong $aB_1B_2B_k$ là

$$-a(b_{22}+b_{33})b_{14}^{(2)}.$$

Ta suy ra hệ số của $b_{41}^{(k)}$ trong tọa độ thứ tư của $L_{B_0,B_1,B_2}(B_k)$ là một đa thức bậc hai theo các hệ số của B_2 trong đó có $b_{13}^{(2)}b_{22}^{(2)}$.

Ta suy ra có thể giải 6 phương trình này theo B_2 bằng cách cố định các giá trị của $b_{ij}^{(2)}$ với $(i,j) \notin \{(1,2),(2,2),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$ sao cho sáu phương trình trở thành một hệ Cramer của 6 biến còn lại trong $b_{ij}^{(2)}$. Sự thoải mái của lựa chọn đảm bảo hạng của hạn chế của L_{B_0,B_1,B_2} lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\}$$

có hạng cực đại, tức là bằng 4.

$$\boxed{\text{Trường hợp con 2: } b_{13} = b_{23} = 0}$$

Nếu $\{b_{41}, b_{42}\} \neq \{0\}$ thì ta lý luận tương tự như trong phần trước với B_k chỉ có một cột duy nhất khác 0.

Do đó ta có thể giả sử rằng $b_{41} = b_{42} = b_{13} = b_{23} = 0$ trong trường hợp con này. Do hạng của L_{B_0,B_1} bằng 4, ta có

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} -b_{43} & 0 & 0 & -b_{43} \\ -b_{22}b_{43} & b_{21}b_{43} & b_{12}b_{43} & -b_{11}b_{43} \end{pmatrix} = 2.$$

Điều này tương đương với

$$\begin{cases} b_{43} \neq 0 \\ b_{22} \neq b_{11} \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} b_{43} \neq 0 \\ b_{21} \neq 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} b_{43} \neq 0 \\ b_{12} \neq 0 \end{cases} . \tag{3.88}$$

Giả sử

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

với $k \geq 3$. Then

$$\frac{\varphi_3^{(k+2)}(0)}{k+2} - (b_{11}+b_{22})\varphi_2^{(k+1)}(0) =$$
$$= (k+1)\left[\frac{B_1B_1B_k}{2} + \frac{B_0B_2B_k}{2} - (b_{11}+b_{22})B_1B_k\right] + \dots \tag{3.89}$$

trong đó các dấu chấm biểu thị các hạng tử chỉ phụ thuộc vào B_i với $i < k$.

Bằng các tính toán trực tiếp, $B_1B_1B_k$ và B_1B_k không chứa $b_{41}^{(k)}$, $b_{42}^{(k)}$ và $b_{43}^{(k)}$.

Ta có

$$B_0B_2B_k = b_{13}^{(2)}b_{41}^{(k)} + b_{23}^{(2)}b_{42}^{(k)} - \left(b_{11}^{(2)} + b_{22}^{(2)}\right) b_{43}^{(k)}.$$

Do đó tọa độ thứ ba của $L_{B_0,B_1,B_2}(M)$ là

$$\frac{B_1B_1M}{2} + \frac{B_0B_2M}{2} - (b_{11} + b_{22})B_1M.$$

Tiếp theo ta xét tọa độ thứ tư của $L_{B_0,B_1,B_2}(B_k)$ bằng tính toán sau.

$$\frac{\varphi_4^{(k+3)}(0)}{(k+2)(k+3)} - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \varphi_2^{(k+1)}(0) =$$

$$= (k+1)\left(\underbrace{\frac{B_1B_1B_1B_k}{3!} + \frac{B_0B_1B_2B_k}{2} - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} B_1B_k}_{= \text{ tọa độ thứ tư của } L_{B_0,B_1,B_2}(B_k)}\right).$$

Ta làm rõ các hạng tử của phương trình trên.

$$\frac{B_1B_1B_1B_k}{3!} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{vmatrix} b_{44}^{(k)}.$$

$$B_0B_1B_2B_k = -\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{41}^{(k)} & b_{42}^{(k)} & b_{43}^{(k)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{41}^{(k)} & b_{42}^{(k)} & b_{43}^{(k)} \end{vmatrix}$$

$$= b_{41}^{(k)}\left(-b_{12}b_{23}^{(2)} + b_{22}b_{13}^{(2)}\right) + b_{42}^{(k)}\left(b_{11}b_{23}^{(2)} - b_{21}b_{13}^{(2)}\right) - \left(\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}\right) b_{43}^{(k)}.$$

Suy ra là hạng của hạn chế của L_{B_0,B_1,B_2} lên

$$\mathbb{C}^4 = \left\{ M \in \mathbb{C}^{4,4} \ : \ M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right\}$$

bằng 4 khi và chỉ khi

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} b_{13}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{22}b_{13}^{(2)} - b_{12}b_{23}^{(2)} & b_{11}b_{23}^{(2)} - b_{21}b_{13}^{(2)} \end{pmatrix} = 2.$$

Điều này tương đương với định thức của nó phải khác 0. Định thức của nó là

$$\begin{aligned} b_{11}b_{13}^{(2)}b_{23}^{(2)} - b_{21}\left(b_{13}^{(2)}\right)^2 - b_{22}b_{13}^{(2)}b_{23}^{(2)} + b_{12}\left(b_{23}^{(2)}\right)^2 = \\ = (b_{11} - b_{22})b_{13}^{(2)}b_{23}^{(2)} - b_{21}\left(b_{13}^{(2)}\right)^2 + b_{12}\left(b_{23}^{(2)}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Bây giờ ta quan sát 6 phương trình theo B_2

$$\varphi_1''(0) = \sigma_1(B_2), \tag{3.91}$$

$$\varphi_2''(0) = B_0B_2 + 2\sigma_2(B_1), \tag{3.92}$$

$$\frac{\varphi_3'''(0)}{3} = B_0B_1B_2 + 2\sigma_3(B_1), \tag{3.93}$$

$$\frac{\varphi_4^{(4)}(0)}{12} = \frac{B_0B_1B_1B_2}{2} + 2\sigma_4(B_1), \tag{3.94}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_3^{(4)}(0)}{12} - (b_{11} + b_{22})\frac{\varphi_2'''(0)}{3} = \\ = \frac{B_1B_1B_2}{2} + \frac{B_0B_2B_2}{4} - (b_{11} + b_{22})B_1B_2 \end{aligned}, \tag{3.95}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_4^{(5)}(0)}{3.4.5} - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}\frac{\varphi_2'''(0)}{3} = \\ = \frac{B_1B_1B_1B_2}{3!} + \frac{B_0B_1B_2B_2}{4} - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} B_1B_2. \end{aligned} \tag{3.96}$$

Ta tính các hạng tử bậc hai trong các phương trình (3.95) và (3.96).

$$\frac{B_0B_2B_2}{2} = -\begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{41}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{42}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix},$$

$$\frac{B_0B_1B_2B_2}{2} = -\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ b_{41}^{(2)} & b_{42}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{41}^{(2)} & b_{42}^{(2)} & b_{43}^{(2)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & b_{43} \end{vmatrix}.$$

Bây giờ ta phải chứng minh rằng 6 phương trình có một nghiệm B_2 sao cho định thức tại (3.90) khác 0. Nhắc lại là ta có 3 "trường hợp con" (xem (3.88)).

Nếu $b_{43} \neq 0$ và $b_{21} \neq 0$ thì ta cố định các giá trị của $b_{ij}^{(2)}$ với

$$(i, j) \notin \{(1, 1), (1, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

sao cho 6 phương trình trở thành một hệ Cramer. Sự thoải mái của lựa chọn đảm bảo định thức ở (3.90) khác 0.

Nếu $b_{43} \neq 0$ và $b_{11} \neq b_{22}$, thì ta cố định các giá trị của $b_{ij}^{(2)}$ với

$$(i, j) \notin \{(1, 1), (2, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}.$$

Nếu $b_{43} \neq 0$ và $b_{12} \neq 0$, thì ta cố định các giá trị của $b_{ij}^{(2)}$ với

$$(i, j) \notin \{(1, 1), (2, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}.$$

Điều này kết thúc chứng minh định lý.

Đánh giá và bàn luận các kết quả

Trong phần Tổng quan, chúng tôi đã phân tích và trình bày về các nghiên cứu trong luận án. Trong mục này, chúng tôi tóm tắt sơ lược các đóng góp của NCS và một vài đánh giá.

Chương 1

Kết quả chính mà chương 1 đạt được tổng quát hơn định lý chính (Định lý 1.7 trong [7]) của ba tác giả Đỗ Đức Thái, Mai Anh Đức và Ninh Văn Thu, cụ thể là lớp đa tạp không thuộc loại $E-$giới hạn rộng hơn và metric E là bất kỳ (trong khi ba tác giả cần E là metric Fubini-Study), đồng thời cách chứng minh ngắn gọn hơn và cũng dễ hiểu hơn. Điều đó góp phần giúp các kết quả này tiếp cận được nhiều người quan tâm hơn. Tuy nhiên, so với Định lý 1.6 trong [7], chúng tôi đòi hỏi E là metric, còn ba tác giả đòi hỏi E là hàm độ dài. Lý do chúng tôi cần E là metric là do trong đánh giá bất đẳng thức, chúng tôi cần bất đẳng thức tam giác.

Chúng tôi không đặt vấn đề tiếp cận giả thuyết tính Zalcman đặt ra trong bài báo [8] bởi vì những kết quả đạt được cho thấy giả thuyết đó vẫn còn ở rất xa khả năng hiện tại của chúng tôi. Chúng tôi đánh giá giả thuyết đó là khó và các hướng hiện tại chưa cho thấy con đường nào sáng sủa cả.

Chương 2

Chương này bao gồm kết quả viết chung giữa NCS với hai nhà Toán học N. Nikolov và P. J. Thomas. Phương pháp nâng nêu ra ở đó là của P. J. Thomas, và hai nhà Toán học đã chứng minh được công thức nâng đó hoạt động trong chiều $n = 4$. Chiều $n = 2$ và $n = 3$ đã được thực hiện bởi J. Agler, N. Young và S. Petrovic.

Đóng góp của NCS là đưa ra chứng minh ngắn gọn hơn so với N. Nikolov và P. J. Thomas, đồng thời chứng minh được công thức nâng đó hoạt động trong chiều $n = 5$ và thất bại ở chiều $n \geq 6$.

Một cái mới trong chương 2 chính là hình thức điều kiện cần và đủ để có thể nâng được φ một cách địa phương (Mệnh đề 2.11). Điều kiện này không phải là mới, nó đã được tìm ra từ bài báo của P. J. Thomas và Nguyễn Văn Trào [19]. Tuy nhiên, hình thức viết ở đây là mới và rõ ràng. Chứng minh cho điều kiện này là mới so với chứng minh trong bài báo [19] và thuộc về P. J. Thomas, chứ không phải của NCS.

Chương 3

Nội dung chương 3 trình bày điều kiện cần và đủ về mặt địa phương cho bài toán nâng có điều kiện đạo hàm bậc nhất trong chiều $n = 4$. Bài toán bắt đầu bằng việc thu gọn B_0 về trường hợp lũy linh. Công việc đó là do thầy đồng hướng dẫn P. J. Thomas thực hiện và NCS tiếp thu lại chuyện đó. Toàn bộ phần công việc còn lại cho trường hợp B_0 lũy linh thuộc về NCS.

Kết quả mà NCS đạt được về mặt địa phương dễ sử dụng hơn kết quả của ba tác giả N. Nikolov, P. Pflug và P. J. Thomas [13] theo nghĩa: các kết quả được trình bày mà không có biến đổi nhiều về mặt tọa độ như các tác giả trước đã làm (mặc dù chứng minh thì có sử dụng biến đổi tọa độ, nhưng kết quả phát biểu thì không phụ thuộc vào chuyện đó).

Các kết quả này chỉ là bước đầu của một kế hoạch lớn hơn, đó là tìm cách chứng minh bài toán trong chiều n tổng quát, và sau đó tìm cách mô phỏng theo cách làm của R. Andrist [2] để chứng minh các điều kiện địa phương cũng là toàn cục.

Nhân tiện NCS cũng muốn nói thêm là cách làm của NCS cho phép không chỉ nghiên cứu được bài toán nâng với điều kiện đạo hàm bậc nhất, mà bậc bao nhiêu cũng có thể làm được. Chúng tôi nói điều này theo nghĩa là trong tình huống cụ thể, chúng tôi có thể biết được các điều kiện ra sao, nhưng về mặt tổng quát, chúng tôi chưa có đường lối chứng minh nào cả.

Trong trường hợp $n = 2$, NCS đã chứng minh được điều kiện cần và đủ cho bài toán nâng địa phương với điều kiện k đạo hàm đầu tiên cho trước. Tuy nhiên chúng tôi không trình bày các kết quả đó vào trong luận án, và sẽ tìm cách công bố ở một nơi thích hợp hơn.

Ngoài các kết quả đã nêu, còn chúng tôi còn tìm ra một số kết quả nhỏ lẻ về hạng của đạo hàm $\mathrm{D}\pi_{B_0}$ trong mối liên hệ với dạng chính tắc hữu tỷ của B_0 và nghiệm hữu tỷ của bài toán nội suy. Các kết quả này sẽ được công bố ở dịp thích hợp.

Kết luận

Các kết quả chính của luận án bao gồm (theo quy định, mục này không có bàn luận nào cả).

Định lý 1.7 Cho X là đa tạp phức có chứa một đường cong nguyên, tức là một đường cong chỉnh hình khác hằng $f\colon \mathbb{C} \to X$. Khi đó, cả hai đa tạp phức $\mathbb{C} \times X$ và $\mathbb{C}^* \times X$ đều không thuộc loại $E-$giới hạn với mọi metric Hermit E tương ứng trên $\mathbb{C} \times X$ và $\mathbb{C}^* \times X$.

Mệnh đề 2.11 Cho $\varphi \in Hol(\omega, \mathbb{G}_n)$, với ω là một lân cận của $\alpha \in \mathbb{D}$. Cho A_1 như trong (2.1). Các khẳng định sau là tương đương:

(a) Tồn tại $\omega' \subset \mathbb{D}$ một lân cận của α và $\Phi \in \mathrm{Hol}(\omega', \Omega_n)$ sao cho

$$\pi \circ \Phi = \varphi, \Phi(0) = A_1;$$

(b) Ánh xạ φ thỏa mãn

$$\frac{d^k P_{[\varphi(\zeta)]}}{dt^k}(\lambda_j) = O((\zeta - \alpha)^{d_{m_j - k}(B_j)}), \quad 0 \le k \le m_j - 1, 1 \le j \le s, \quad (3.97)$$

trong đó d_i như trong Định nghĩa 2.10.

(c) Tồn tại $\omega' \subset \mathbb{D}$ một lân cận của α và $\Phi \in Hol(\omega', \Omega_n)$ sao cho

$$\pi \circ \Phi = \varphi, \Phi(0) = A_1 \text{ và } \Phi(\zeta) \text{ cyclic với } \zeta \in \omega' \setminus \{\alpha\}.$$

Định lý 2.20 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $n \le 5$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{M}_n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{D}$ và $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{G}_n)$.

Khi đó tồn tại $\Phi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \Omega_n)$ thỏa mãn $\varphi = \pi \circ \Phi$ và $\Phi(\alpha_j) = A_j$ với $j = 1, \ldots, N$ khi và chỉ khi φ thỏa mãn các điều kiện (2.2) cho mỗi j, với A_j thay cho A_1 và α_j thay cho α, trong đó $1 \le j \le N$.

Thêm nữa ta có thể chọn giá trị $\Phi(\zeta)$ là ma trận cyclic khi $\zeta \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

Định lý 3.7 Giả sử $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$. Dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương khi và chỉ khi các điều kiện sau được thỏa mãn

(i) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$,

(ii) $\varphi_1'(0) = \sigma_1(B_1)$, $\varphi_2'(0) = B_0B_1$, $\varphi_3'(0) = \dfrac{B_0B_0B_1}{2}$,

(iii) $\varphi_4'(0) = 0$, $\varphi_4''(0) = \dfrac{B_0B_0B_1B_1}{2} = 0$,

(iv) $\dfrac{\varphi_4'''(0)}{3} - b_{11}\varphi_3''(0) = \dfrac{B_0B_1B_1B_1}{3} - b_{11}B_0B_1B_1$.

Định lý 3.8 Giả sử $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 4$. Dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương khi và chỉ khi các điều kiện sau được thỏa mãn

(i) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$,

(ii) $\varphi_1'(0) = \sigma_1(B_1)$, $\varphi_2'(0) = B_0B_1$, $\varphi_3'(0) = \dfrac{B_0B_0B_1}{2}$,

(iii) $\varphi_4'(0) = 0$, $\varphi_4''(0) = \dfrac{B_0B_0B_1B_1}{2} = 0$.

Định lý 3.9 Giả sử $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 2$. Dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương khi và chỉ các điều sau được thỏa mãn

(i) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$,

(ii) $\varphi_1'(0) = \sigma_1(B_1)$, $\varphi_2'(0) = B_0B_1$,

(iii) $\varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0$,

(iv) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$,

(v) $\varphi_4''(0) = \frac{B_0B_0B_1B_1}{2} = 2\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix} = 0$,

(vi) $\varphi_4'''(0) = B_0B_1B_1B_1$,

(vii) $\frac{\varphi_3'''(0)}{3} - \alpha\varphi_2''(0) = 2\sigma_3(B_1) - 2\alpha\sigma_2(B_1)$.

Định lý 3.10 Giả sử $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$. Dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương khi và chỉ khi

(i) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$,

(ii) $\varphi_1'(0) = \sigma_1(B_1)$, $\varphi_2'(0) = B_0B_1$,

(iii) $\varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0$,

(iv) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$,

(v) $\varphi_4''(0) = \frac{B_0B_0B_1B_1}{2} = 2\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix}$,

(vi) $\varphi_4'''(0) + 3\kappa\varphi_2''(0) = B_0B_1B_1B_1 + 6\kappa\sigma_2(B_1)$.

Định lý 3.11 Giả sử $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 4$. Dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương khi và chỉ khi

(i) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$,

(ii) $\varphi_1'(0) = \sigma_1(B_1)$, $\varphi_2'(0) = B_0B_1$,

(iii) $\varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0$,

(iv) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$,

(v) $\varphi_4''(0) = \frac{B_0B_0B_1B_1}{2} = 2\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix}$.

Định lý 3.12 Trong trường hợp $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 2$ và $\{b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}\} \neq \{0\}$ dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương khi và chỉ khi

(i) $\varphi(0) = \pi(B_0) = (0, 0, 0, 0)$,

(ii) $\varphi'(0) = (\sigma_1(B_1), B_0B_1, 0, 0) = (\sigma_1(B_1), -b_{43}, 0, 0)$,

(iii) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$,

(iv) $\varphi_4''(0) = 0$,

(v) $\underbrace{\frac{\varphi_3'''(0)}{3} - 2\sigma_3(B_1)}_{=B_0B_1B_2} = (b_{11} + b_{22})\Big(\underbrace{\varphi_2''(0) - 2\sigma_2(B_1)}_{B_0B_2}\Big)$

(vi) $\underbrace{\frac{\varphi_4^{(4)}(0)}{12} - 2\sigma_4(B_1)}_{=\frac{B_0B_1B_1B_2}{2}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}\Big(\underbrace{\varphi_2''(0) - 2\sigma_2(B_1)}_{=B_0B_2}\Big)$.

Định lý 3.13 Trong trường hợp $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 2$ và $\{b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}\} = \{0\}$ dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương khi và chỉ khi

(i) $\varphi(0) = \pi(B_0) = (0, 0, 0, 0)$,

(ii) $\varphi'(0) = (\sigma_1(B_1), B_0B_1, 0, 0) = (\sigma_1(B_1), -b_{43}, 0, 0)$,

(iii) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$,

(iv) $\varphi_4''(0) = 0$,

(v) $\dfrac{\varphi_3'''(0)}{3} = \dfrac{\varphi_4^{(4)}(0)}{12} = 0$

(vi) $\varphi_4^{(5)}(0) = 0$.

Định lý 3.14 Nếu $\operatorname{rank}(L_{B_0,B_1}) = 3$, thì dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương khi và chỉ khi các điều kiện sau được thỏa mãn

(i) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$,

(ii) $\varphi_1'(0) = \sigma_1(B_1)$, $\varphi_2'(0) = B_0B_1 = -b_{43}$,

(iii) $\varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0$,

(iv) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$, $\varphi_4''(0) = 0$,

(v) $\varphi_4'''(0) = B_0B_1B_1B_1$,

(vi) $\dfrac{\varphi_4^{(4)}(0)}{12} - \kappa\dfrac{\varphi_3'''(0)}{3} - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \varphi_2''(0) = 2\sigma_4(B_1) - 2\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \sigma_2(B_1)$
$- 2\kappa\sigma_3(B_1) + 2\kappa(b_{11} + b_{22})\sigma_2(B_1)$.

Định lý 3.15 Dữ liệu $\{\varphi, B_0, B_1\}$ nâng được địa phương khi và chỉ khi

(i) $\varphi(0) = \pi(B_0)$,

(ii) $\varphi'(0) = \mathrm{D}\pi_{B_0}B_1$ trong đó $\mathrm{D}\pi_{B_0}$ là đạo hàm toàn phần của π tại B_0,

(iii) $\varphi_3''(0) = B_0B_1B_1$, $\varphi_4''(0) = 0$, $\varphi_4'''(0) = B_0B_1B_1B_1$.

Kiến nghị về những nghiên cứu tiếp theo

Chương 1 & 2 không có kiến nghị nào cả. Lý do là: các kết quả về đường cong Brody giới hạn nằm trong khuôn khổ nghiên cứu hướng tới giả thuyết về tính Zalcman đặt ra bởi các tác giả trong bài báo [8], tuy nhiên, cho tới nay, các kết quả đạt được vẫn còn xa để có thể nghĩ tới giải quyết trọn vẹn giả thuyết tính Zalcman. Vì thế, chúng tôi cho rằng không nên kiến nghị những mục tiêu quá khó, vì như thế không thiết thực. Còn đối với chương 2, như đã trình bày, kết quả của R. Andrist [2] khiến cho việc nghiên cứu bài toán nâng không có điều kiện đạo hàm về mặt lý thuyết đã kết thúc. Cũng chính điều đó thúc đẩy NCS và các thầy hướng dẫn hướng tới nghiên cứu bài toán nâng có điều kiện đạo hàm bậc nhất, mà các kết quả, có thể nói là bước đầu, được trình bày ở chương 3.

Với các kết quả của chương 3, chúng tôi hi vọng có thể tìm được hình thức cho điều kiện cần và đủ cho bài toán nâng có điều kiện đạo hàm bậc 1 ở trường hợp tổng quát. Với ít tham vọng hơn thì chúng ta có thể nghiên cứu bài toán nâng với điều kiện đạo hàm bậc 1 và 2 cho trước. Sau đó là tiến tới chứng minh điều kiện địa phương cũng là điều kiện toàn cục bằng cách mô phỏng lại cách làm của R. Andrist. Khi làm được tất cả những điều đó, ta có thể đem ứng dụng vào nghiên cứu hàm Lempert và hàm (giả) khoảng cách Kobayashi trong quả cầu phổ cũng như đa đĩa đối xứng hóa.

Các bài báo đã được công bố và tiền ấn phẩm của tác giả

[15] Nikolov, Nikolai, Thomas, Pascal J., and Tran, Duc-Anh. "Lifting maps from the symmetrized polydisc in small dimensions". *Complex Anal. Oper. Theory* 10.5 (2016), pp. 921–941.

[21] Tran, Duc-Anh. "Lifting map problem from the symmetrized polydisc $\mathbb{G}_4$ with given first derivative". Preprint.

[22] Tran, Duc-Anh. "On the non-existence of limit E-Brody curves". *Acta Math. Vietnam.* 41.4 (2016), pp. 711–714.

Tài liệu tham khảo

[1] Agler, Jim and Young, Nicholas J. "The two-point spectral Nevanlinna–Pick problem". *Integral Equations and Operator Theory* 37 (2000), pp. 375–385.

[2] Andrist, Rafael B. "Lifting to the spectral ball with interpolation". *J. Math. Anal. Appl.* 435.1 (2016), pp. 315–320.

[3] Bercovici Hari; Foias, Ciprian and Tannenbaum, Allen. "A Spectral Commutant Lifting Theorem". *Transactions of the American Mathematical Society* 325.2 (Jun., 1991), pp. 741–763.

[4] Boor, C. de. "Divided Differences". *Surv. Approx. Theory* 1 (2005), pp. 46–69.

[5] Brody, Robert. "Compact manifolds and hyperbolicity". *Trans. Amer. Math. Soc.* 235 (1978), pp. 213–219.

[6] Costara, C. "On the spectral Nevanlinna-Pick problem". *Studia Math.* 170 (2005), pp. 23–55.

[7] Do, Duc Thai, Mai, Anh Duc, and Ninh, Van Thu. "On limit Brody curves in $\mathbb{C}^n$ and $(\mathbb{C}^*)^2$". *Kyushu Journal of Mathematics* 69.1 (2015), pp. 111–123.

[8] Do, Duc Thai, Pham, Nguyen Thu Trang, and Pham, Dinh Huong. "Families of normal maps in Several Complex Variables and hyperbolicity of complex spaces". *Complex Variables* 48.6 (2003), pp. 469–482.

[9] Garnett, John B. *Bounded analytic functions.* Revised first edition. Graduate Texts in Mathematics, 236. New York: Springer, 2007, xiv+459 pp. ISBN: 978-0-387-33621-3; 0-387-33621-4.

[10] Greub, Werner. *Multilinear algebra.* second. Universitext. New York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1978, vii+294 pp. ISBN: 0-387-90284-8.

[11] Gunning, Robert C. and Rossi, Hugo. *Analytic functions of several complex variables.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1965, pp. xiv+317.

[12] Huang, H.-N., Marcantognini, S. A. M., and Young, N. J. "The spectral Carathéodory-Fejér problem". *Integral Equations Operator Theory* 56.2 (2006), pp. 229–256.

[13] Nikolov, N., Pflug, P., and Thomas, P. J. "Spectral Nevanlinna-Pick and Carathéodory-Fejér problems". *Indiana Univ. Math. J.* 60.3 (2011), pp. 883–894.

[14] Nikolov, N., Thomas, P. J., and Zwonek, W. "Discontinuity of the Lempert function and the Kobayashi-Royden metric of the spectral ball". *Indiana Univ. Math. J.* 61 (2008), pp. 401–412.

[15] Nikolov, Nikolai, Thomas, Pascal J., and Tran, Duc-Anh. "Lifting maps from the symmetrized polydisc in small dimensions". *Complex Anal. Oper. Theory* 10.5 (2016), pp. 921–941.

[16] Petrovic, Srdjan. "An extremal problem in interpolation theory". *Houston J. Math.* 26.1 (2000), pp. 165–181.

[17] Rudin, Walter. *Real and complex analysis.* New York: McGraw-Hill Book Co., 1987, pp. xiv+416. ISBN: 0-07-054234-1 00A05 (26-01 30-01 46-01).

[18] Sarason, Donald. "Generalized interpolation in $H\,\mathrm{Sp}\,\infty$". *Trans. Amer. Math. Soc.* 127.2 (1967), pp. 179–203.

[19] Thomas, P. J. and Nguyen, Van Trao. "Discontinuity of the Lempert function of the spectral ball". *Proc. Amer. Math. Soc.* 138.7 (2010), pp. 2403–2412.

[20] Thomas, Pascal J., Nguyen, Van Trao, and Zwonek, Wlodzimierz. "Green functions of the spectral ball and symmetrized polydisk". *J. Math. Anal. Appl.* 377 (2011), pp. 624–630.

[21] Tran, Duc-Anh. "Lifting map problem from the symmetrized polydisc $\mathbb{G}_4$ with given first derivative". Preprint.

[22] Tran, Duc-Anh. "On the non-existence of limit E-Brody curves". *Acta Math. Vietnam.* 41.4 (2016), pp. 711–714.

[23] Young, Nicholas J. "Some analysable instances of μ-synthesis". *Operator Theory: Advances and Applications.* Ed. by H. Dym, M. de Oliveira and Putinar, M. Vol. 222. Springer, Basel, 2012. Chap. Mathematical methods in systems, optimization and control, pp. 349–366.

[24] Zalcman, Lawrence. "A heuristic principle in complex function theory". *Amer. Math. Monthly* 82.8 (1975), pp. 813–817.

[25] Zalcman, Lawrence. "Normal families: New perspectives". *Bull. Amer. Math. Soc.* 35 (1998), pp. 215–230.